ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PMC 581 TRABALHO DE FORMATURA

Projeto e Modelagem de um Posicionador Flexível

Orientador : Agenor de Toledo Fleury

Roberto Borges de Lázari
Número U.S.P. : 1.788.616

ÍNDICE

1.Introdução.

2.Caracterização do problema

3.O Projeto.

3.1.Síntese de soluções.

4.Valor econômico e viabilidade financeira.

5.Controle de estruturas flexíveis.

6.Determinação das características dinâmicas do mecanismo.

6.1.Momento de inércia da barra.

6.2.Montagem das Matrizes de Rigidez e de Massa

6.3.Metodologia dos Cálculos

6.4.Matriz de rigidez.

6.5.Matrizes de massa e frequências de ressonância.

6.6.Variação da frequência dos modos de vibrar.

7.Obtenção do modelo reduzido.

7.1.Hipóteses utilizadas

7.2.Modelamento

8.Sistema de controle.

9.Considerações finais.

10.Bibliografia

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho de formatura, iremos estudar mecanismos posicionadores, particularmente os mecanismos de posicionamento que levem em conta a flexibilidade do sistema. O título escolhido para este trabalho desenvolvido com a orientação do Professor Agenor de Toledo Fleury é *Projeto e Modelagem de um Posicionador Flexível.*

Seu objetivo é o desenvolvimento do projeto de um mecanismo experimental que faz parte de uma proposta conjunta IPT - Escola Politécnica da USP, apresentada à AEB - Agência Espacial Brasileira, para o estudo de Controle de Estruturas Flexíveis.

Na primeira parte foi apresentado, no primeiro semestre, o Estudo de Viabilidade do Projeto, em que foram feitos o estabelecimento da necessidade, a especificação técnica, a síntese de soluções, a exequibilidade física e a viabilidade financeira.

Nesta parte final do trabalho é apresentado a versão final do Projeto, incluindo a primeira parte do projeto e o Projeto Básico, em que teremos primeiramente um estudo genérico de controle de estruturas flexíveis; são determinadas as características dinâmicas do sistema (uma barra com um carro percorrendo a mesma), faremos também, depois de escolhidas as frequências de ressonâncias a serem estudadas, o projeto simples de um controle completo sem observador.

2. CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

O uso de mecanismos posicionadores é muito difundido. No princípio, eram rígidos e de acionamento manual, como o braço da agulha em toca-discos antigos. Com o surgimento das primeiras máquinas a vapor, começaram a surgir os mecanismos de acionamento mecânico. Agora, com a grande difusão dos equipamentos elétricos, temos praticamente todos os mecanismos posicionadores também com esse acionamento.

Como exemplos de posicionadores podemos ter : guindastes utilizados em construção, braços de robôs, leitoras de discos rígidos de micro-computadores, controladores de antena parabólicas, entre outros.

Geralmente esses mecanismos posicionadores são muito rígidos. Isso significa que a deformação da estrutura durante o funcionamento é desprezada. Sendo assim, utilizamos quase sempre, para garantir essa rigidez, muito mais material do que o necessário.

Então, a necessidade de uma grande rigidez nos faz gastar mais material, que por sua vez aumenta o momento de inércia do mecanismo, necessitando de uma maior energia para movimentá-lo o mecanismo.

Apesar disso, o estabelecimento da necessidade de uma nova solução para um mecanismo de posicionamento se dá quase sempre por uma limitação no peso da estrutura. Essa limitação do peso é muito comum em projetos aeroespaciais, pois o custo, por exemplo, de se colocar em órbita um satélite com um quilograma a mais na estrutura representa um grande

aumento do custo de lançamento, o que faz com que seja vantajosa a utilização de formas alternativas de estrutura.

A idéia deste trabalho é fazer um estudo da utilização de estruturas flexíveis nos posicionadores. Assim, diminuindo a rigidez, diminuiremos a massa do mecanismo.

3. O PROJETO

Este é um projeto de um mecanismo experimental para o estudo do controle de estruturas flexíveis. Como estamos começando agora a trabalhar com esse tipo de controle, optamos por um modelo simples, que é o controle de uma barra flexível. Esse mecanismo permitirá também o estudo de um caso complicado de estrutura; colocando um carro correndo sobre a barra, teremos um campo muito vasto para o estudo, com isso o nosso problema torna-se não linear, pois para cada posição do carro teremos um momento de inércia, e também uma variação das frequências de ressonâncias da barra.

Recordando as linhas básicas do projeto, utilizaremos um modelo semelhante ao de um guindaste de cargas. Nesta estrutura (Figura 1) temos uma base em forma de um cilindro rígido, e um elemento de viga flexível representando o braço do posicionador. Temos também, percorrendo esse braço, um "carro" considerado como uma massa pontual deslocando-se sobre a viga.

Na próxima página, apresentamos (Figura 2) um esquema da ligação da barra aos sensores, à placa de aquisição de dados e ao microcomputador, sendo que o micro irá gerar um sinal de controle de acordo com a estratégia de controle escolhida.

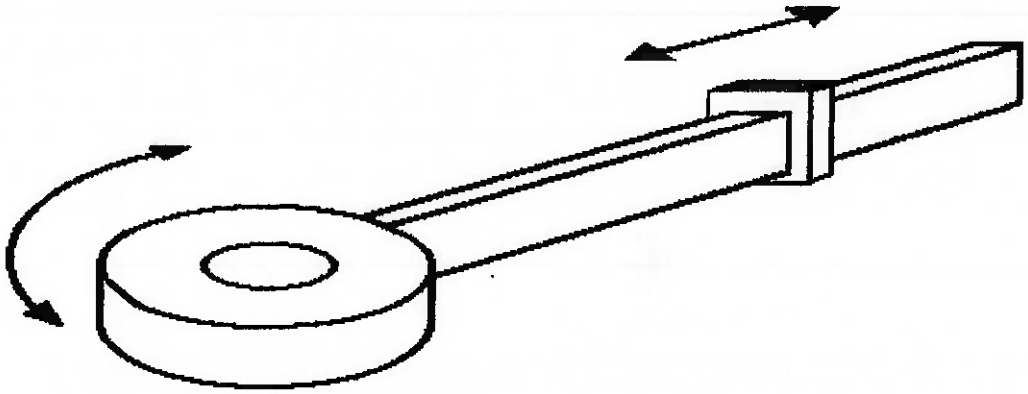


FIGURA 1

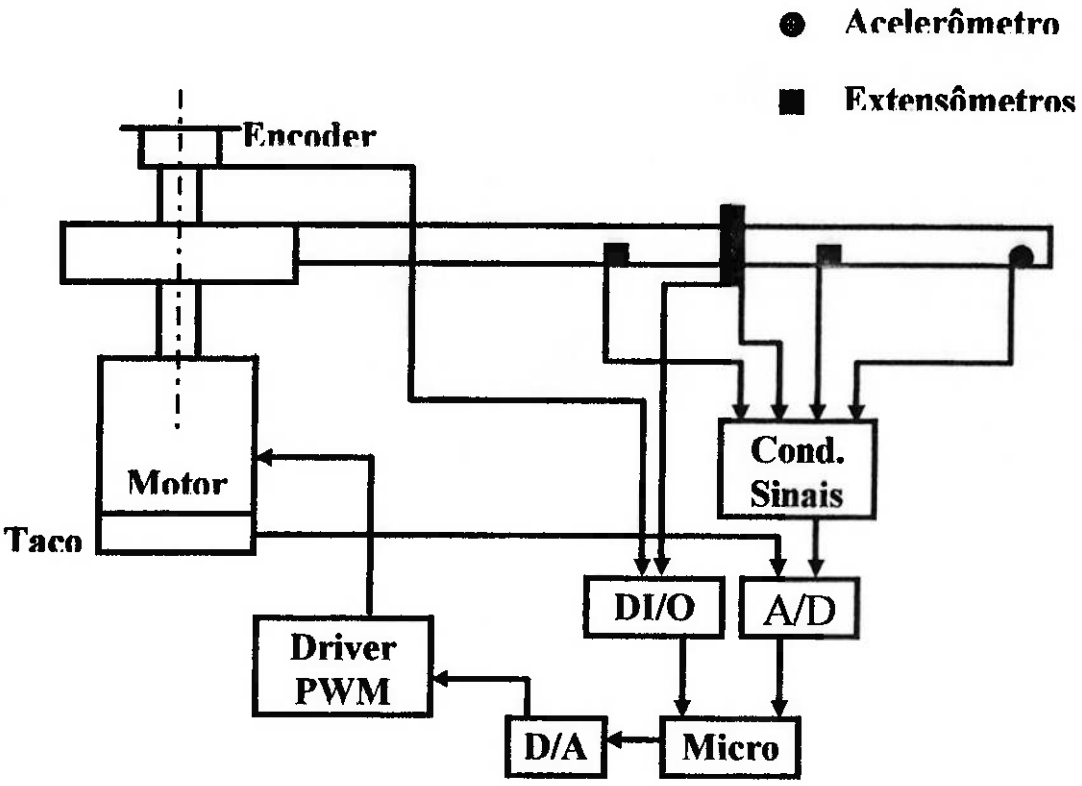


FIGURA 2 - Cintra, 1994

3.1. SÍNTESE DE SOLUÇÕES

Iremos fazer a síntese de soluções para cada um dos elementos que compõem o nosso mecanismo. Assim, iremos analisar as possíveis configurações e escolher as melhores soluções para o nosso mecanismo.

Os elementos a serem analisados serão:

- barra flexível
- carro móvel
- forma de acionamento do carro
- escolha dos motores do carro e da base

Barra Flexível

Para a escolha da barra, devemos levar em consideração o peso e a rigidez, assim, poderemos ter a barra de vários materiais e com um perfil variado

Poderemos ter a barra de vários materiais, como aço laminado, alumínio, PVC, entre outros. Se escolhermos o aço, teremos, para o peso desejado um perfil com dimensões muito pequenas, dificultando a fixação do carro na barra. Já a escolha do PVC pode ser comprometida pela falta de perfis adequados no mercado e por ser muito flexível e por apresentar comportamento altamente não linear do material.

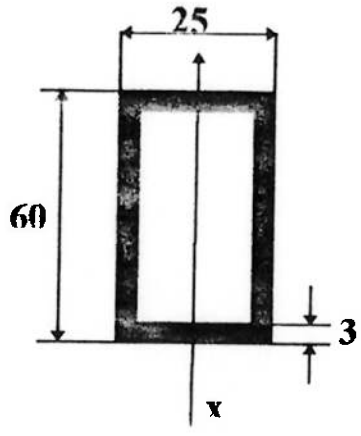
A escolha deve recair então, sobre o alumínio que atende a todas as características, possui diversos perfis no mercado, possui uma densidade não muito alta, sendo ideal para se obter o peso desejado.

No que diz respeito à escolha do perfil, existem as seguintes formas de barra no mercado (Figura 3). A restrição é o fato de que o perfil deve ser simétrico.

Por razões de preço e facilidade de obtenção, o primeiro perfil, de seção retangular vazada, mostrado na Figura 3 será utilizado.

FIGURA 3

A barra escolhida terá o seguinte perfil, com as medidas indicadas :



Para essas dimensões, o momento de inércia mais importante no dimensionamento é $Ix = 5{,}6835\ cm^4$.

Carro Móvel

Para que o carro corra pela barra é preciso que esse movimento seja guiado. Como não podemos colocar uma guia convencional na barra, pois a barra é flexível, o que travaria o movimento, então temos que projetar o carro de forma que ele utilize a barra como guia.

Na Figura 4, temos alguns exemplos de guias e alguns exemplos de possibilidades de projeto do carro móvel, utilizando resíduos, elementos pneumáticos ou utilizando graxa para diminuir o atrito.

Já na Figura 5 obtemos um carro que satisfaz a nossa necessidade, ele utiliza rolos que deslizam nas laterais da barra e na parte superior. Sendo assim, teremos um atrito muito baixo. O movimento para cima é limitado diretamente pelo peso do carro, que será feito de ferro fundido.

Forma de Acionamento do Carro

Dentre as diversas formas de acionamento do carro, podemos ter :

- acionamento por pinhão-cremalheira (motor no carro).
- acionamento por transmissão (motor na base).

Como teremos temos como o principal efeito a ser estudado é a flexão da barra, o sistema de cremalheira se torna de difícil utilização. Sendo assim, escolhemos um sistema com o motor na base e acionamento por fios.

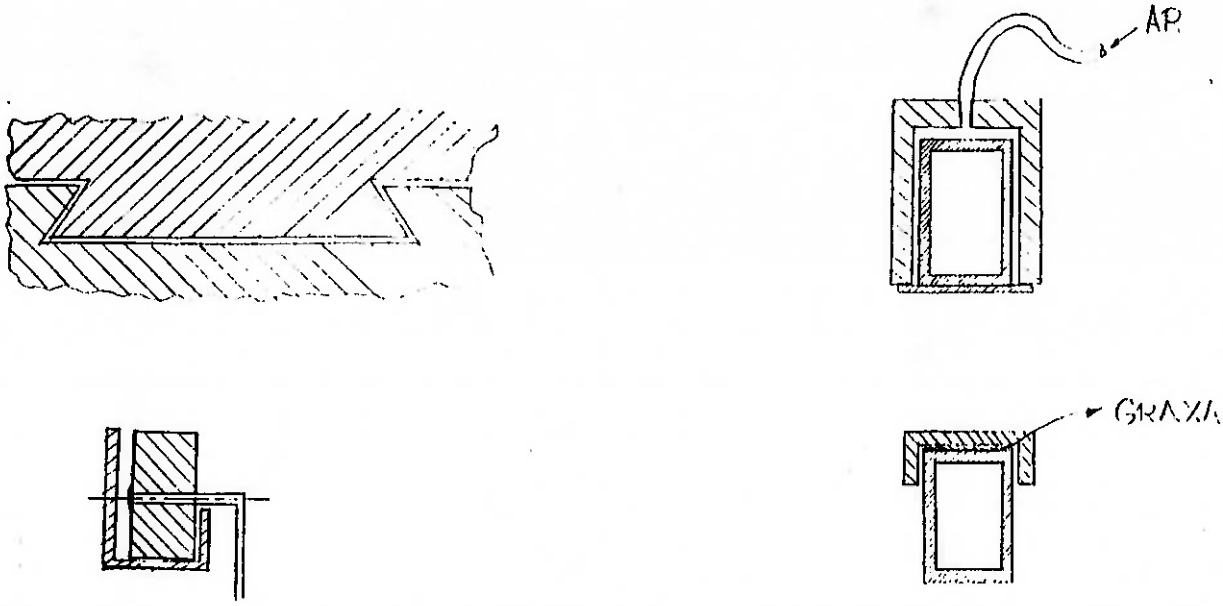


FIGURA 4

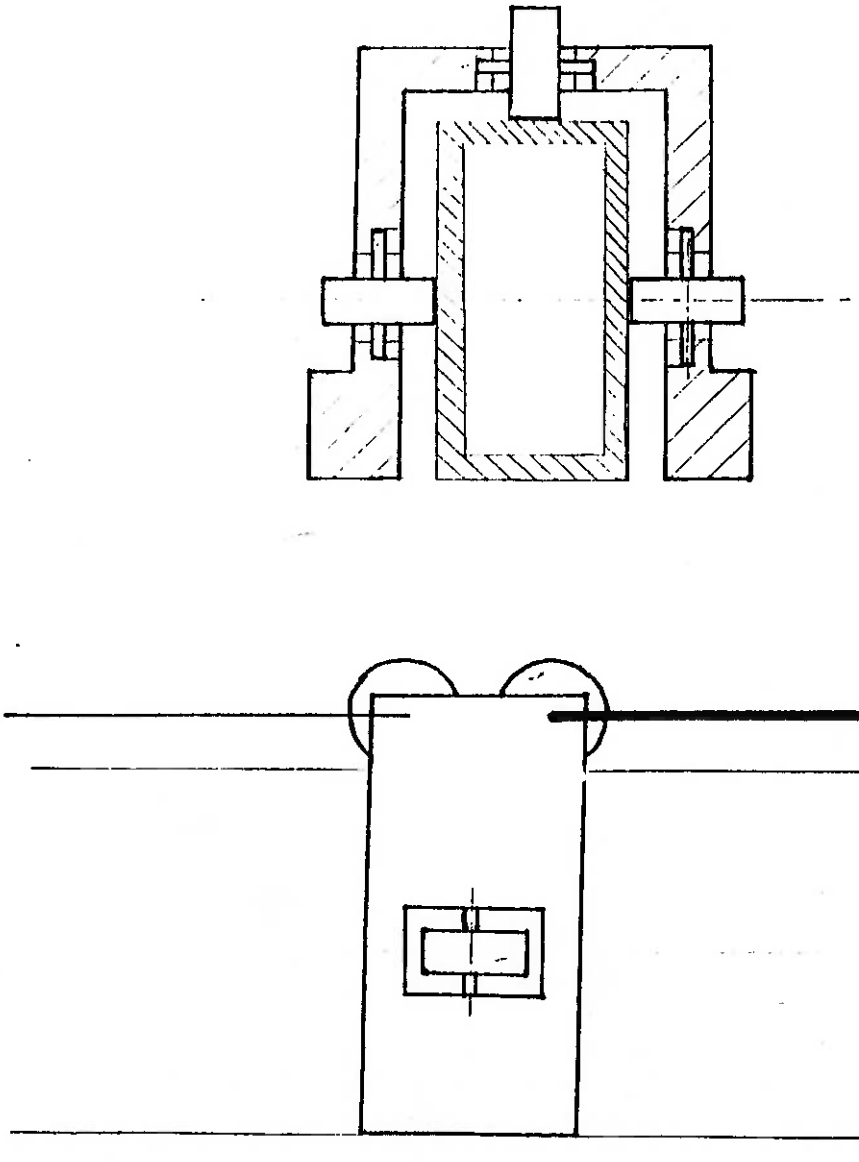


FIGURA 5

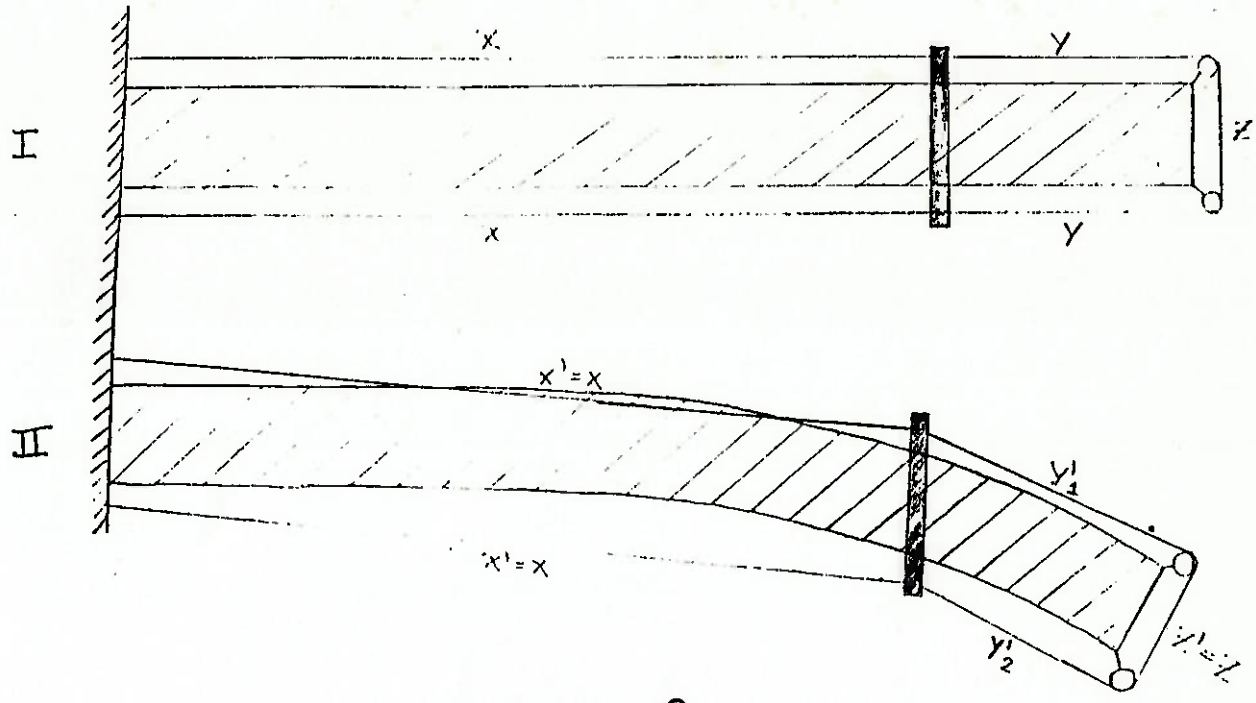


FIGURA 6

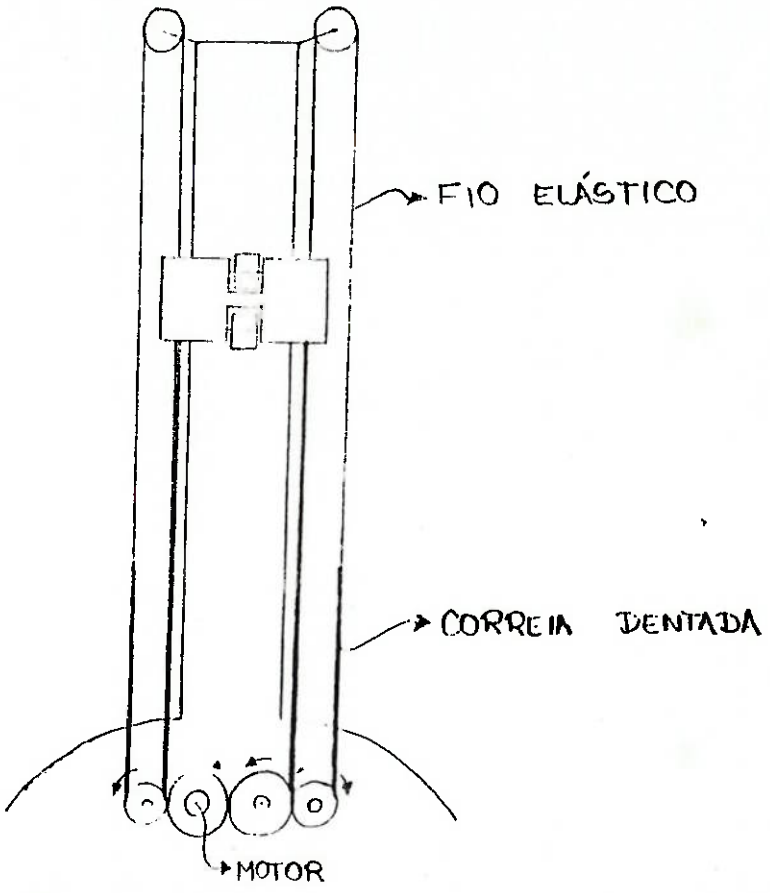


FIGURA 7

O problema agora se resume a projetar o acionamento. A grande dificuldade está no fato de que, havendo a flexão na barra, o comprimento necessário ao acionamento varia, como mostra a Figura 6. Assim, teremos que pensar em um modo para evitar essa variação do comprimento, ou algum modo de trabalhar com essa variação do comprimento sem perder o controle sobre a estrutura, então, poderemos ter basicamente duas soluções:

- utilizar um elemento elástico que compense essa variação no comprimento do cabo de acionamento (Figura 7) .
- utilizar elementos que limitem a variação de comprimento do cabo de acionamento (Figura 8)

Temos, que para a solução da Figura 8 uma grande incerteza quanto ao comportamento do mecanismo durante as frequências de ressonância. Utilizaremos então a solução da Figura 7, que parece bem satisfatória.

Motores do carro e da base

Os motores aqui utilizados deverão ser motores CC, com velocidade variável entre zero e o limite desejado. Deverão ter um torque necessário ao acionamento do carro ou da base.

Para o motor de acionamento do carro teremos :

massa do carro : 1,5 Kg

velocidade máxima do carro : 0,5 m/s

aceleração máxima do carro : 0,2 g

raio da engrenagem que aciona o carro : 0,01 m

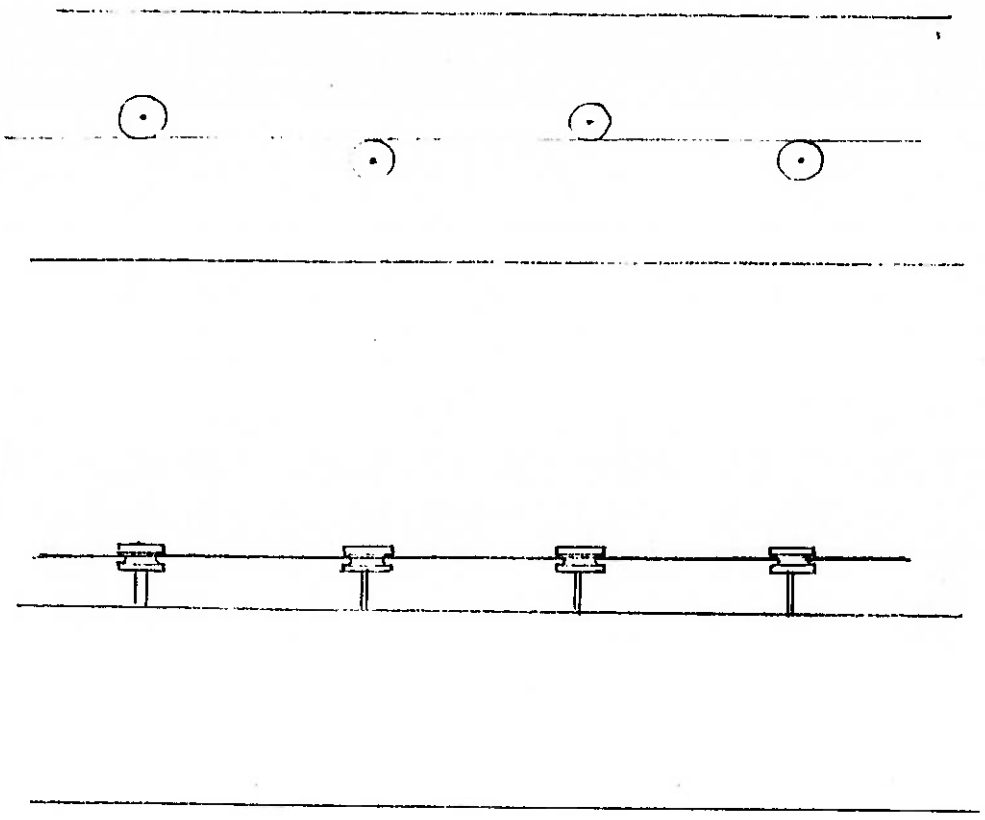


FIGURA 8

Com isso, teremos que utilizar um motor que atinja uma rotação de 500 rpm e que possua uma potência maior que 1 W, que é muito baixa.

Para o acionamento do cubo da barra, temos :

peso da barra = 1,5 Kgf

peso do carro = 1,5 Kgf

momento de inércia devido à barra = 1 $Kg*m^2$

momento de inércia devido ao carro

na posição extrema = 3 $Kg*m^2$

rotação do motor = 4 rpm = 0,4 rad/s.

Sendo assim, o motor necessário para o acionamento do cubo da barra deverá variar a rotação de 0 a 4 rpm e deverá ter uma potência de 0.1 HP. Poderemos utilizar, se necessário, uma redução, o que resultaria em uma maior faixa de trabalho para o motor, e consequentemente uma maior resolução na velocidade.

Não iremos, nessa fase escolher os motores especificados, pois primeiramente iremos fazer a simulação no computador, e ainda não sabemos a disponibilidade que iremos ter de motores para a montagem do mecanismo, bem como se será possível a montagem do mesmo.

4. VALOR ECONÔMICO E VIABILIDADE FINANCEIRA

O valor econômico desse projeto vai além do valor de um simples produto. Poderemos ter esse projeto como base para o desenvolvimento do controle de outras estruturas flexíveis; o fato de se ter um carro móvel na barra aumenta o grau de complexidade, mas também aumenta a possibilidade de melhor conclusão que se pode tirar sobre este tipo de mecanismo.

Para termos uma idéia clara da viabilidade financeira de se utilizar estruturas flexíveis, vamos analisar o seguinte exemplo:

Emprego de estruturas flexíveis no posicionamento de painéis em satélites. Como podemos observar na Figura 9, o satélite possui gigantescos painéis que tendem a ficar cada vez maiores, para ampliar as faixas de transmissão.

O painel circular possui 10 metros de diâmetro e o painel retangular possui 12 metros de comprimento. Se fôssemos construir esses paineis rígidos, teríamos um aumento de peso do satélite na ordem de dezenas a centenas de quilos.

O lançamento de um satélite é um evento muito caro. O último contrato feito pelo Brasil para o lançamento de dois satélites, cada satélite pesando uma tonelada, foi da ordem de 65 milhões de dólares.

Considerando o custo de lançamento de um satélite de uma tonelada como sendo 30 milhões de dólares, temos que o custo de lançamento de um quilograma de satélite sai por 30 mil dólares.

Com isso, vemos que é extremamente inviável a utilização de estruturas rígidas para os painés de satélites e qualquer outra estrutura aeroespacial.

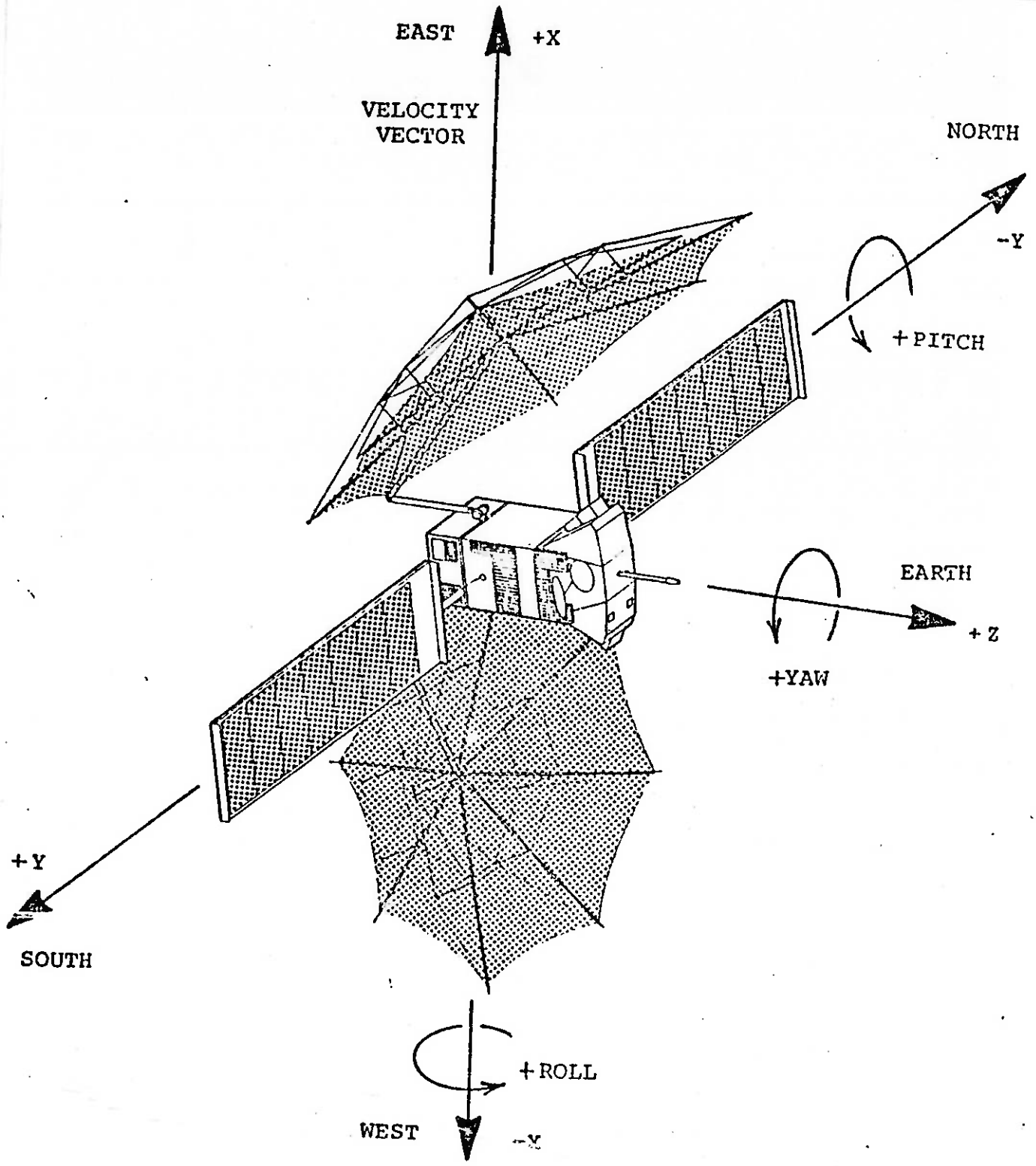


FIGURA 9

Configuração de estudos do satélite M-SAT (Mobile Communications Satelite) da SPAR Aerospace Co. (1983)

5. CONTROLE DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

O controle de estruturas envolve um grande número de áreas do conhecimento. Em particular, a mecânica analítica para uma eficiente derivação das equações de movimento, dinâmica de estruturas para modelagem e análise, e a teoria para o projeto de um sistema de controle.

Para um bom controle de estruturas devemos ter um bom entendimento de todas as áreas envolvidas, sendo que algumas vezes temos que fazer algumas aproximações para podemos unir essas áreas. Isso pode ser facilmente exemplificado com o fato de que a estrutura é essencialmente um sistema de parâmetros distribuídos e a base da teoria de controle foi desenvolvida para sistemas de parâmetros concentrados, e em particular, para sistemas de ordem baixa. Não existe metodologia consagrada para sistemas de parâmetros distribuidos, representados por equações diferenciais a derivadas parciais.

Uma prática comum para se trabalhar com estruturas é utilizar modelos discretos obtidos através de processos de discretização. Modelos mais realistas tendem a ter um grande número de graus de liberdade, estando bem acima da capacidade dos algorítimos de controle.

Temos, então que o grande desafio para o projeto de controle de estruturas flexíveis é obter um modelo de ordem reduzida, para o qual seja possível projetar um sistema de controle, e que ao mesmo tempo consiga representar, com uma bom desempenho, a estrutura original.

O uso de controle ativo em estruturas e componentes tem melhorado consideravelmente o desempenho dos mesmos. Nas últimas décadas, essa idéia relativamente nova tem cada vez mais atraído a atenção de profissionais de diversas áreas da engenharia. Esse controle ativo permite que as estruturas fiquem mais leves do que as que não possuem controle.

No controle ativo temos um ganho através da realimentação; os atuadores aplicam forças na estrutura baseados na resposta da estrutura, medida através de sensores. Em contraste, o controle passivo modifica o desempenho de uma estrutura através da mudança da rigidez, distribuição de massa e dissipação de energia, isso geralmente é obtido com o uso de materiais diferentes.

No tipo de estrutura proposto neste trabalho, a flexibilidade passa a ter um papel preponderante, não podendo ser desconsiderada durante o projeto do sistema de controle. Frequentemente os modelos dinâmicos utilizados para representar aquelas estruturas são admitidos lineares e invariantes no tempo. Algumas características marcantes naquela situação são a ocorrência de modelos dinâmicos compostos de muitos modos de vibrar e um amortecimento natural muito pequeno. Nesse caso fica evidente a de se atuar ativamente sobre as vibrações da estrutura (ou pelo menos sobre alguns modos mais significativos) .

Pela necessidade de se obter um modelo reduzido para facilitar a síntese do controlador, dois pontos merecem destaque. O primeiro é a economia de memória e aumento de velocidade de cálculo, o que é particularmente

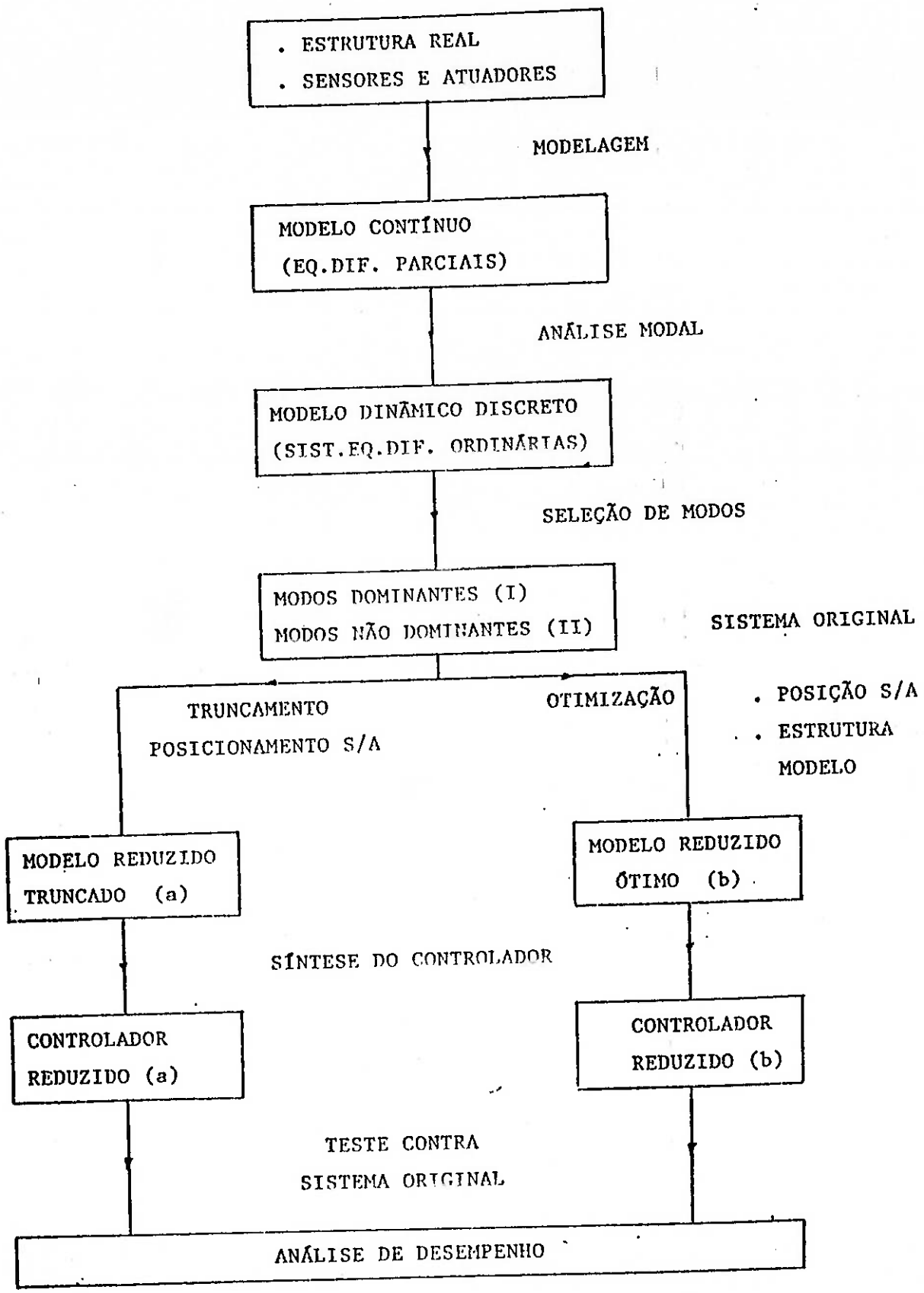
interessante quando se pensa em computadores embarcados tendo que trabalhar em tempo real. O segundo ponto é que o comportamento dinâmico do modelo se afasta cada vez mais do comportamento da estrutura real, à medida que se consideram os modos de maior frequência, segundo Meirovitch, 1990.

Um problema que provavelmente surge em um projeto desse tipo, e que deve ser amenizado ao máximo, é o chamado "spillover", que corresponde à interação entre o sistema de controle e os modos não explicitamente incluídos naquele modelo, quer devido à contaminação da saída pelos mesmos, quer pela excitação daqueles modos pelos atuadores.

Outro fato que torna o problema de controle de estruturas flexíveis mais complicado, porém mais fascinante, é que o projetista tem de certa forma liberdade de posicionar sensores e atuadores em diversos pontos sobre a estrutura. Este posicionamento tem, no entanto, a influência marcante sobre o desempenho final do sistema de controle.

Para se obter o modelo dinâmico, devemos, primeiramente selecionar os modos críticos ou dominantes. Após obter o modelo reduzido, devemos determinar a posição de sensores e atuadores, fazer o projeto de um controlador de ordem reduzida, e depois verificar o desempenho do controlador contra o sistema original.

A seguir (Figura 10), temos as fases de desenvolvimento de um trabalho de controle de estruturas flexíveis (1988, Lourenção).



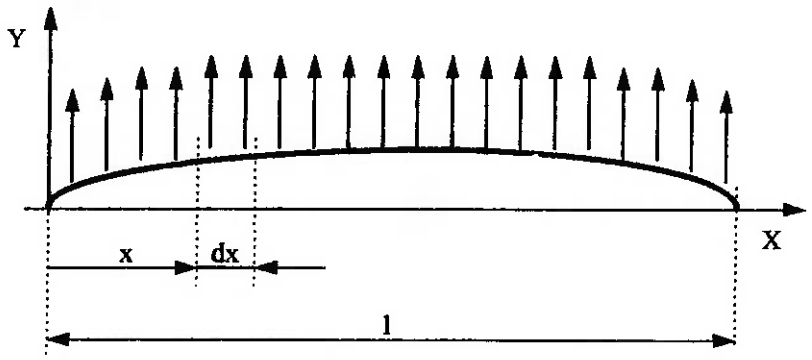
Fases de desenvolvimento deste trabalho.

FIGURA 10

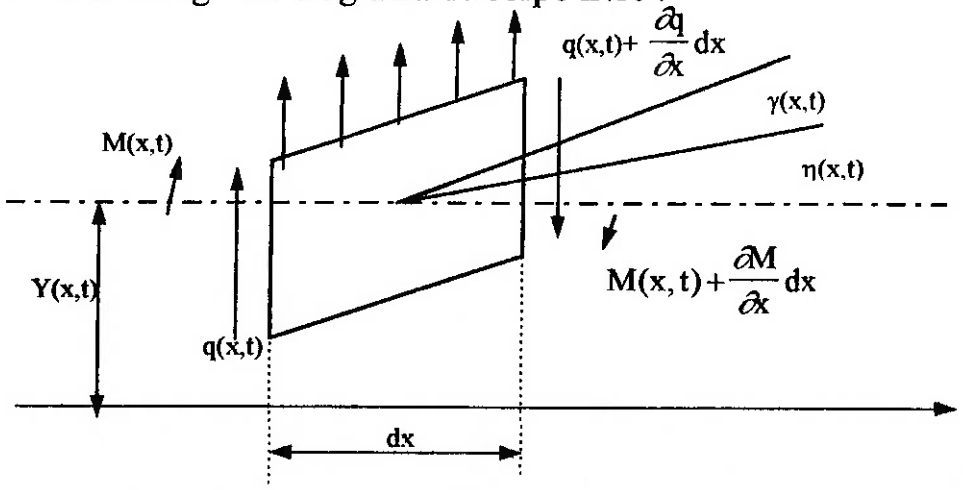
6. DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DO MECANISMO

Estruturas são descritas por modelos contínuos. Isto significa que as propriedades de interesse para qualquer estudo, como massa, rigidez e amortecimento, estão distribuídas em coordenadas espaciais ao longo da estrutura. Qualquer problema em Dinâmica de Estruturas corresponde a resolver uma ou um conjunto de Equações Diferenciais a Derivadas Parciais, dada a mistura entre tempo e coordenadas espaciais. Isto corresponde ao chamado Modelo Espacial da Estrutura.

Trabalhando com o caso de uma viga em flexão, teremos :



Teremos o seguinte diagrama de corpo livre :



Sendo η a rotação devido à flexão e γ a rotação devido ao cisalhamento, temos que a inclinação é dada por :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \eta(x,t) + \gamma(x,t)$$

O momento fletor é dado por :

$$M(x,t) = EI(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Temos também que a deformação por cisalhamento é dada por :

$q(x,t)=k'GA(x)\gamma(x,t)$

k'= fator de forma da viga transversal

Energia cinética do elemento (translação + rotação)

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]^2 m(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left[\frac{\partial \eta}{\partial t}\right]^2 J(x)dx$$

$m(x) = \rho\, A(x)$ = massa por unidade de comprimento.

$J(x) = \rho\, I(x)$ = momento de inércia de massa por unidade de comprimento, considerando a densidade constante.

Trabalho virtual no elemento (conservativo + não conservativo)

$$\delta W(t) = -\delta V(t) + \int_0^l P(x,t)\partial Y(x,t)dt$$

A energia potencial no elemento :

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^l M(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\int_0^l q(x,t)\gamma(x,t)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l kGA(x)\gamma^2(x,t)dx.$$

Pelo Princípio de Hamilton, temos que :

$$\int_{t2}^{t1}(\partial T + \partial W)dt = 0$$

Sendo $\delta\eta$ e $\delta\gamma$ serem nulos nas extremidades, chega-se a :

$$\frac{\partial}{\partial x}[k'GA(x)(\frac{\partial y}{\partial x}-\eta)] - m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(EI(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}) + k'GA(x) (\frac{\partial y}{\partial x}-\eta) - r^2 m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

onde r(x) é o raio de giração da seção transversal ($I=\rho Ar^2$) com as condições de contorno teremos :

$$(EI(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}) \delta\eta \Big|_0^l = 0 \quad , e$$

$$[k'GA(\frac{\partial y}{\partial x}-\eta)] \delta\gamma \Big|_0^l = 0.$$

Este modelo é chamado de VIGA DE TIMOSCHENKO, que é um modelo ainda muito complicado para ser aplicado. Veremos então algumas simplificações, como admitir os efeitos de cisalhamento e de inércia de rotação nulos.

Teremos aqui :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \eta(x,t) \qquad (\gamma (x,t) = 0)$$

$$\int_0^l \left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]^2 J(x)\, dx = 0$$

Admitindo as forças externas nulas, teremos as equações que descrevem o modelo de VIGA EULER-BERNOULLI.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

as condições de contorno associadas foram :

$$\left[EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \Big|_0^l = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta y \Big|_0^l = 0$$

As condições de contorno acima cobrem todo os tipos possíveis de vinculação : engastamento, articulação, apoio, extremidade livre, etc.

Apesar desse modelo ser consideravelmente mais simples, o modelo de Euler-Bernoulli é muito difícil de tratar de maneira direta. Usa-se então, separação de variáveis, isolando a coordenada espacial **x** da variável tempo **t**, admitindo que a solução da equação original possa ser escrita como :

$$y(x,t) = Y(x) * F(t)$$

$$\frac{1}{m(x)Y(x)} \frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2Y}{dx^2}\right] = -\frac{1}{F(t)}\frac{d^2F(t)}{dt^2} = w^2$$

w^2 é a constante de separação.

Então, teremos o seguinte sistemas de equações :

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2Y}{dx^2}\right] - w^2\, m(x)\, Y(x) = 0$$

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} + w^2F(t) = 0$$

O conjunto de equações diferenciais ordinárias acima tem soluções para um conjunto enumerável de parâmetros w_i , que são as frequencias naturais de vibração da viga.

Para cada valor de w_i^2 que satisfaz as 2 equações acima,existe uma correspondente solução $Y_i(x)$ espacial que satisfaz também as condições de contorno, indicando a forma da deflexão. São os modos de vibrar da estrutura, ou, os modos naturais da viga.

A solução que procura os modos naturais e as frequências correspondem a Análise Modal do Sistema. Reparem que isso vem apenas como decorrência da Separação de Variáveis e se aplica a qualquer sistema.

Usar modelos contínuos na análise dinâmica de estruturas é praticamente impossível. A única saída é procurar simplificações. Essas simplificações vem da discretização espacial do modelo utilizando o método dos elementos finitos, por exemplo.

Nesse nosso projeto utilizaremos o MEF (Método dos Elementos Finitos). Primeiramente dividiremos a nossa estrutura em 8 partes, 6 elementos de barra, 1 elemento do cubo, e o carro (FIGURA 11) . Sendo que a barra está engastada ao cubo da barra, teremos uma análise considerando uma viga engastada, com uma carga concentrada devido ao carro.

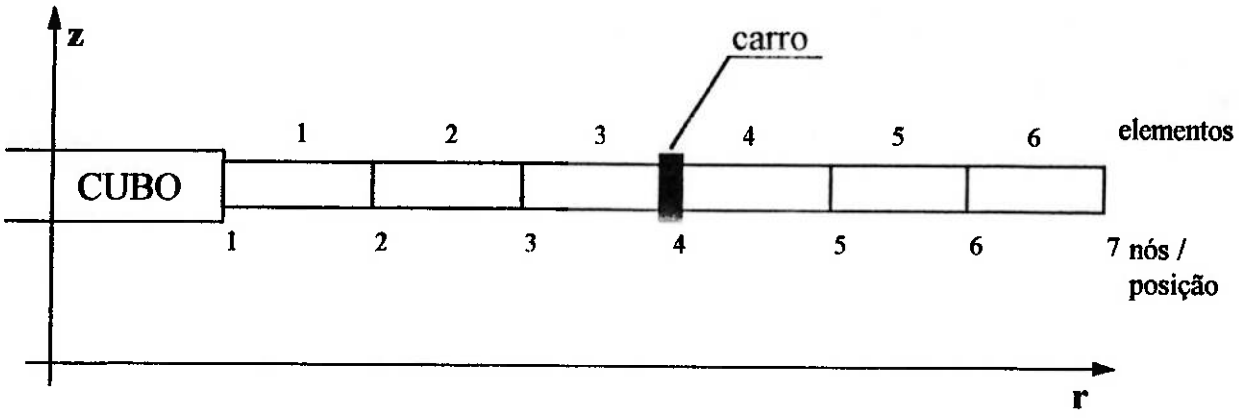


FIGURA 11

6.1 MOMENTO DE INÉRCIA (J) DA BARRA

Utilizando a discretização adotada, é obtido o momento de inércia em relação ao eixo **z**, considerando a seguinte fórmula de recorrência para cada nó da estrutura :

$$J_i = m_i * r_i^2$$

O momento de inércia total da barra é :

$$J_T = \sum_{i=1}^{7} J_i$$

A seguir é obtido, para cada posição do carro, o momento de inércia total da barra.

Para fazer os cálculos foi adotada a massa distribuída da barra e a massa concentrada do carro como sendo de 1,5 Kg.

CARRO POSIÇÃO 7

NÓ	MASSA(Kg)	RAIO (m)	J7(elem) (Kg*m2)
1	0,128454	0,2	0,005138
2	0,256908	0,4	0,041105
3	0,256908	0,6	0,092486
4	0,256908	0,8	0,164421
5	0,256908	1	0,256908
6	0,256908	1,2	0,369947
7	1,756908	1,4	3,443539

J7 TOTAL = 4,373546 Kg*m^2

CARRO POSIÇÃO 6

NÓ	MASSA(Kg)	RAIO (m)	J6(elem) (Kg*m2)
1	0,128454	0,2	0,005138
2	0,256908	0,4	0,041105
3	0,256908	0,6	0,092486
4	0,256908	0,8	0,164421
5	0,256908	1	0,256908
6	1,756908	1,2	2,529947
7	0,256908	1,4	0,503539

J6 TOTAL = 3,593546 Kg*m^2

CARRO POSIÇÃO 5

NÓ	MASSA(Kg)	RAIO (m)	J5(elem) (Kg*m2)
1	0,128454	0,2	0,005138
2	0,256908	0,4	0,041105
3	0,256908	0,6	0,092486
4	0,256908	0,8	0,164421
5	1,756908	1	1,756908
6	0,256908	1,2	0,369947
7	0,256908	1,4	0,503539

J5 TOTAL = 2,933546 Kg*m^2

CARRO POSIÇÃO 4

NÓ	MASSA(Kg)	RAIO (m)	J4(elem) (Kg*m2)
1	0,128454	0,2	0,005138
2	0,256908	0,4	0,041105
3	0,256908	0,6	0,092486
4	1,756908	0,8	1,124421
5	0,256908	1	0,256908
6	0,256908	1,2	0,369947
7	0,256908	1,4	0,503539

J4 TOTAL = 2,393546 Kg*m^2

CARRO POSIÇÃO 3

NÓ	MASSA(Kg)	RAIO (m)	J3(elem) (Kg*m2)
1	0,128454	0,2	0,005138
2	0,256908	0,4	0,041105
3	1,756908	0,6	0,632486
4	0,256908	0,8	0,164421
5	0,256908	1	0,256908
6	0,256908	1,2	0,369947
7	0,256908	1,4	0,503539

J3 TOTAL = 1,973546 Kg*m^2

CARRO POSIÇÃO 2

NÓ	MASSA(Kg)	RAIO (m)	J2(elem) (Kg*m2)
1	0,128454	0,2	0,005138
2	1,756908	0,4	0,281105
3	0,256908	0,6	0,092486
4	0,256908	0,8	0,164421
5	0,256908	1	0,256908
6	0,256908	1,2	0,369947
7	0,256908	1,4	0,503539

J2 TOTAL = 1,673546 Kg*m^2

CARRO POSIÇÃO 1

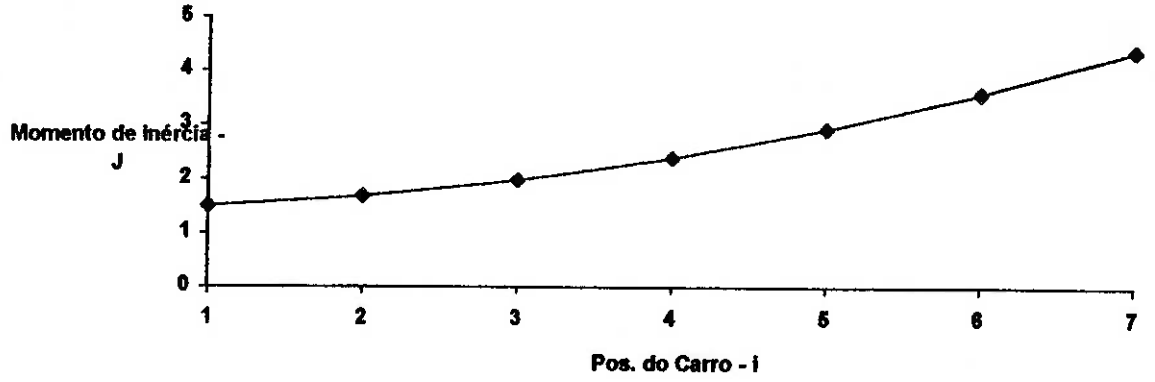
NÓ	MASSA(Kg)	RAIO (m)	J1(elem) (Kg*m2)
1	1,628454	0,2	0,065138
2	0,256908	0,4	0,041105
3	0,256908	0,6	0,092486
4	0,256908	0,8	0,164421
5	0,256908	1	0,256908
6	0,256908	1,2	0,369947
7	0,256908	1,4	0,503539

J1 TOTAL = 1,493546 Kg*m^2

RESULTADOS OBTIDOS :

i	RAIO (m)	J (i)
1	0,2	1,493546
2	0,4	1,673546
3	0,6	1,973546
4	0,8	2,393546
5	1	2,933546
6	1,2	3,593546
7	1,4	4,373546

MOMENTO DE INÉRCIA EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO DO CARRO



6.2. MONTAGEM DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E DE MASSA

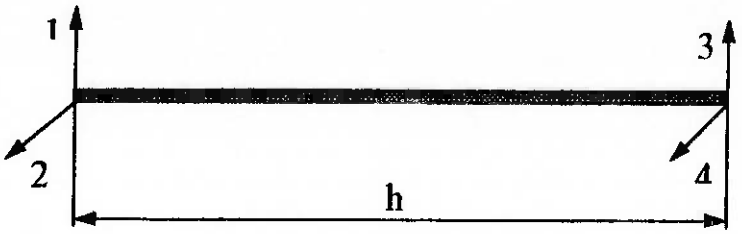


FIGURA 12

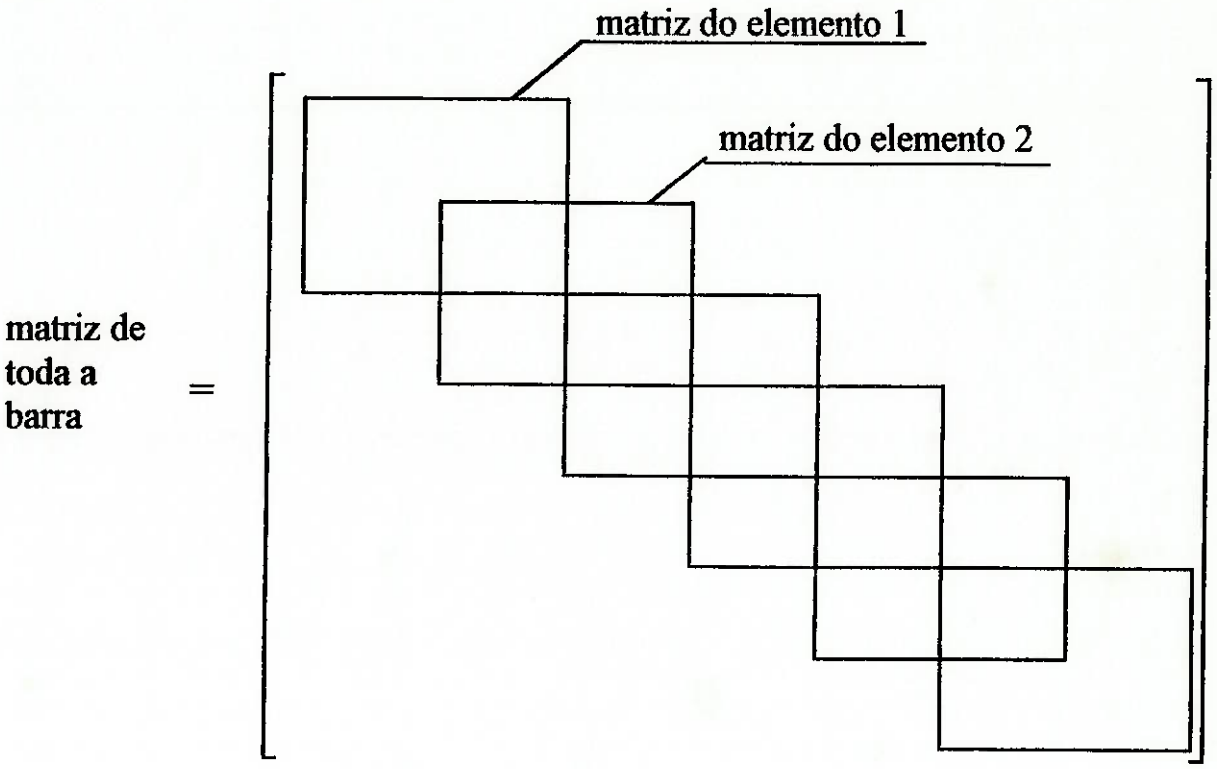
De acordo com a bibliografia 5 e 6, temos que, para um elemento de barra, como indicado na Figura 12 , com 4 graus de liberdade, as características podem ser dadas .

$$[k] = E\,I / h^3 * \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[m] = mh / 420 * \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & -4 \end{bmatrix}$$

O processo de montagem das matrizes que representam a estrutura como um todo é muito simples, primeiramente devemos ter uma compatibilidade geométrica, isto é, um nó deve ter associado todos os

elementos que possuem este nó. Assim, teremos a seguinte montagem dos elementos :



Onde temos as intersecções das matrizes dos elementos, devemos somar os valores correspondentes a cada posição.

Como consideramos que o carro que percorre a barra é pontual, temos que o mesmo não influencia na matriz de rigidez do sistema. Mas o carro deve ser considerado para a montagem da matriz de massa. Para isso, basta somar a massa do carro na posição correspondente.

Após a montagem da matriz de rigidez, devemos inserir as condições de contorno. Com isso, temos as duas linhas e colunas nulas pelo engaste na primeira extremidade (nó 1).

6.3. METODOLOGIA DOS CÁLCULOS

Para fazer os cálculos foi utilizado o software MATLAB, que permite com isso trabalhar com as matrizes com uma certa facilidade.

O nosso sistema responde a seguinte equação :

$$[M]\ddot{x} + [K]\,x = 0$$

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = \ddot{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tirando os autovalores da matriz $- M^{-1} K$, obteremos as frequências naturais de vibração do sistema.

No MATLAB utilizamos a seguinte nomenclatura :

mbarra = matriz de massa da barra

mi = matriz de massa com carro na posição **i**

kbarra2 = matriz de rigidez da barra

miin = matriz inversa da matriz **mi**

w2oi = matriz $M^{-1} K$

gi = matriz dos autovalores da matriz $M^{-1} K$

wi_j = frequência natural número **j** com o carro na posição **i**

A sequência de comandos para a obtenção das frequências dos modos de vibrar (**i** variando de 1 a 7) foram os seguintes :

miin = inv (mi)

w2oi = miin * kbarra2

[fi,gi] = eig (w2oi)

wi_j = (gi(j,j) ^.5) / (2 * 3,14159265)

6.4. MATRIZ DE RIGIDEZ

kbarra2 =

1.0e+005 *

Columns 1 through 7

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	4.7741	0	-2.3871	1.1935	0
0	0	0	1.5914	-1.1935	0.3978	0
0	0	-2.3871	-1.1935	4.7741	0	-2.3871
0	0	1.1935	0.3978	0	1.5914	-1.1935
0	0	0	0	-2.3871	-1.1935	4.7741
0	0	0	0	1.1935	0.3978	0
0	0	0	0	0	0	-2.3871
0	0	0	0	0	0	1.1935
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 14

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
1.1935	0	0	0	0	0	0
0.3978	0	0	0	0	0	0
0	-2.3871	1.1935	0	0	0	0
1.5914	-1.1935	0.3978	0	0	0	0
-1.1935	4.7741	0	-2.3871	1.1935	0	0
0.3978	0	1.5914	-1.1935	0.3978	0	0
0	-2.3871	-1.1935	4.7741	0	-2.3871	1.1935
0	1.1935	0.3978	0	1.5914	-1.1935	0.3978
0	0	0	-2.3871	-1.1935	2.3871	-1.1935
0	0	0	1.1935	0.3978	-1.1935	0.7957

6.5 MATRIZES DE MASSA E FREQUÊNCIAS NATURAIS

Nesta parte do trabalho, iremos apresentar para cada posição do carro, considerando somente o carro nos nós, a matriz de massa correspondente e também todas as frequências naturais obtidas a partir da metodologia descrita no capítulo 6.3.

É interessante observar que, dentre as frequências obtidas, temos as frequências naturais de flexão, as frequências naturais de torção e também frequências que são uma combinação de flexão e torção e que não interessam neste trabalho. Na verdade consideraremos somente as frequências de flexão que são as de menor frequência e que serão possíveis de serem excitadas.

CARRO NA POSIÇÃO 1

Matriz de Massa
m1 =

Columns 1 through 7

1.5191	0.0027	0.0066	-0.0016	0	0	0
0.0027	0.0005	0.0016	-0.0004	0	0	0
0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0
-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0
0	0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066
0	0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016
0	0	0	0	0.0066	0.0016	0.0382
0	0	0	0	-0.0016	-0.0004	0
0	0	0	0	0	0	0.0066
0	0	0	0	0	0	-0.0016
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 14

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0004	0	0	0	0	0	0
0	0.0066	-0.0016	0	0	0	0
0.0010	0.0016	-0.0004	0	0	0	0
0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0	0
-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0	0
0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016
0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004
0	0	0	0.0066	0.0016	0.0191	-0.0027
0	0	0	-0.0016	-0.0004	-0.0027	0.0005

Frequências de Ressonância - Hz

w1_1 = 0	w1_2 = 0
w1_3 = 5.9292e+003	w1_4 = 4.4351e+003
w1_5 = 3.4472e+003	w1_6 = 2.5542e+003
w1_7 = 1.8576e+003	w1_8 = 1.3344e+003
w1_9 = 859.8572	w1_10 = 570.2228
w1_11 = 338.5249	w1_12 = 170.7300
w1_13 = 60.6762	w1_14 = 9.5280

CARRO NA POSIÇÃO 2

Matriz de Massa
m2 =

Columns 1 through 7

0.0191	0.0027	0.0066	-0.0016	0	0	0
0.0027	0.0005	0.0016	-0.0004	0	0	0
0.0066	0.0016	1.5382	0	0.0066	-0.0016	0
-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0
0	0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066
0	0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016
0	0	0	0	0.0066	0.0016	0.0382
0	0	0	0	-0.0016	-0.0004	0
0	0	0	0	0	0	0.0066
0	0	0	0	0	0	-0.0016
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 14

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0004	0	0	0	0	0	0
0	0.0066	-0.0016	0	0	0	0
0.0010	0.0016	-0.0004	0	0	0	0
0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0	0
-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0	0
0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016
0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004
0	0	0	0.0066	0.0016	0.0191	-0.0027
0	0	0	-0.0016	-0.0004	-0.0027	0.0005

Frequências de Ressonância - Hz

w2_1 =0	w2_2 =0
w2_3 =5.9289e+003	w2_4 =4.4693e+003
w2_5 =3.5011e+003	w2_6 =2.5569e+003
w2_7 =1.8061e+003	w2_8 =1.2572e+003
w2_9 =763.2805	w2_10 =457.0834
w2_11 =232.2735	w2_12 =88.6726
w2_13 =37.4633	w2_14 =9.3344

CARRO NA POSIÇÃO 3

Matriz de Massa
m3 =

Columns 1 through 7

0.0191	0.0027	0.0066	-0.0016	0	0	0
0.0027	0.0005	0.0016	-0.0004	0	0	0
0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0
-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0
0	0	0.0066	0.0016	1.5382	0	0.0066
0	0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016
0	0	0	0	0.0066	0.0016	0.0382
0	0	0	0	-0.0016	-0.0004	0
0	0	0	0	0	0	0.0066
0	0	0	0	0	0	-0.0016
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 14

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0004	0	0	0	0	0	0
0	0.0066	-0.0016	0	0	0	0
0.0010	0.0016	-0.0004	0	0	0	0
0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0	0
-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0	0
0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016
0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004
0	0	0	0.0066	0.0016	0.0191	-0.0027
0	0	0	-0.0016	-0.0004	-0.0027	0.0005

Frequências de Ressonância - Hz

w3_1 = 0
w3_2 =0
w3_3 = 5.9254e+003
w3_4 = 4.4894e+003
w3_5 =3.3592e+003
w3_6 =2.3767e+003
w3_7 =1.8637e+003
w3_8 =1.2953e+003
w3_9 = 732.9136
w3_10 = 509.7671
w3_11 = 329.6891
w3_12 = 119.7543
w3_13 =24.9293
w3_14 =7.5002

CARRO NA POSIÇÃO 4

Matriz de Massa
m4 =

Columns 1 through 7

0.0191	0.0027	0.0066	-0.0016	0	0	0
0.0027	0.0005	0.0016	-0.0004	0	0	0
0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0
-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0
0	0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066
0	0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016
0	0	0	0	0.0066	0.0016	1.5382
0	0	0	0	-0.0016	-0.0004	0
0	0	0	0	0	0	0.0066
0	0	0	0	0	0	-0.0016
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 14

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0004	0	0	0	0	0	0
0	0.0066	-0.0016	0	0	0	0
0.0010	0.0016	-0.0004	0	0	0	0
0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0	0
-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0	0
0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016
0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004
0	0	0	0.0066	0.0016	0.0191	-0.0027
0	0	0	-0.0016	-0.0004	-0.0027	0.0005

Frequências de Ressonância - Hz

w4_1 = 0
w4_2 = 0
w4_3 = 5.9130e+003
w4_4 = 4.4680e+003
w4_5 = 3.3667e+003
w4_6 = 2.5278e+003
w4_7 = 1.7027e+003
w4_8 = 1.3307e+003
w4_9 = 719.6497
w4_10 = 571.2008
w4_11 = 251.9509
w4_12 = 170.7711
w4_13 = 30.6035
w4_14 = 5.1435

CARRO NA POSIÇÃO 5

Matriz de Massa
m5 =

Columns 1 through 7

0.0191	0.0027	0.0066	-0.0016	0	0	0
0.0027	0.0005	0.0016	-0.0004	0	0	0
0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0
-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0
0	0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066
0	0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016
0	0	0	0	0.0066	0.0016	0.0382
0	0	0	0	-0.0016	-0.0004	0
0	0	0	0	0	0	0.0066
0	0	0	0	0	0	-0.0016
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 14

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0004	0	0	0	0	0	0
0	0.0066	-0.0016	0	0	0	0
0.0010	0.0016	-0.0004	0	0	0	0
0.0016	1.5382	0	0.0066	-0.0016	0	0
-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0	0
0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016
0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004
0	0	0	0.0066	0.0016	0.0191	-0.0027
0	0	0	-0.0016	-0.0004	-0.0027	0.0005

Frequências de Ressonância - Hz

w5_1 = 0
w5_2 = 0
w5_3 = 5.8679e+003
w5_4 = 4.4122e+003
w5_5 =3.4967e+003
w5_6 =2.4586e+003
w5_7 = 1.7033e+003
w5_8 = 1.3417e+003
w5_9 = 760.4153
w5_10 = 483.1067
w5_11 = 334.4707
w5_12 = 128.5568
w5_13 = 48.6177
w5_14 = 3.6199

CARRO NA POSIÇÃO 6

Matriz de Massa
m6 =

Columns 1 through 7

0.0191	0.0027	0.0066	-0.0016	0	0	0
0.0027	0.0005	0.0016	-0.0004	0	0	0
0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0
-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0
0	0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066
0	0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016
0	0	0	0	0.0066	0.0016	0.0382
0	0	0	0	-0.0016	-0.0004	0
0	0	0	0	0	0	0.0066
0	0	0	0	0	0	-0.0016
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 14

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0004	0	0	0	0	0	0
0	0.0066	-0.0016	0	0	0	0
0.0010	0.0016	-0.0004	0	0	0	0
0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0	0
-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0	0
0	0.0066	0.0016	1.5382	0	0.0066	-0.0016
0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004
0	0	0	0.0066	0.0016	0.0191	-0.0027
0	0	0	-0.0016	-0.0004	-0.0027	0.0005

Frequências de Ressonância - Hz

w6_1 = 0
w6_2 = 0
w6_3 = 5.7045e+003
w6_4 =4.3911e+003
w6_5 =3.2872e+003
w6_6 =2.4379e+003
w6_7 =1.8695e+003
w6_8 = 1.3178e+003
w6_9 = 802.4356
w6_10 = 481.8971
w6_11 = 274.9394
w6_12 = 163.7174
w6_13 = 58.5676
w6_14 = 2.6845

CARRO NA POSIÇÃO 7

Matriz de Massa
m7 =

Columns 1 through 7

0.0191	0.0027	0.0066	-0.0016	0	0	0
0.0027	0.0005	0.0016	-0.0004	0	0	0
0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0
-0.0016	-0.0004	0	0 0010	0.0016	-0.0004	0
0	0	0 0066	0 0016	0.0382	0	0.0066
0	0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016
0	0	0	0	0.0066	0.0016	0.0382
0	0	0	0	-0.0016	-0.0004	0
0	0	0	0	0	0	0.0066
0	0	0	0	0	0	-0.0016
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Columns 8 through 14

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-0.0016	0	0	0	0	0	0
-0.0004	0	0	0	0	0	0
0	0.0066	-0.0016	0	0	0	0
0.0010	0.0016	-0.0004	0	0	0	0
0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016	0	0
-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004	0	0
0	0.0066	0.0016	0.0382	0	0.0066	-0.0016
0	-0.0016	-0.0004	0	0.0010	0.0016	-0.0004
0	0	0	0.0066	0.0016	1.5191	-0.0027
0	0	0	-0.0016	-0.0004	-0.0027	0.0005

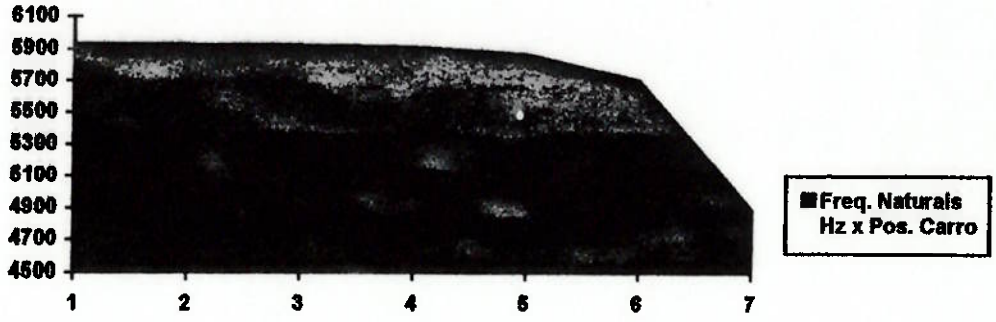
Frequências de Ressonância - Hz

w7_1 = 0
w7_2 = 0
w7_3 = 4.8850e+003
w7_4 = 4.2254e+003
w7_5 = 3.2648e+003
w7_6 = 2.4001e+003
w7_7 = 1.7256e+003
w7_8 = 1.2217e+003
w7_9 = 798.1231
w7_10 = 509.6707
w7_11 = 292.0983
w7_12 = 138.6670
w7_13 = 42.9216
w7_14 = 2.0802

6.6 GRÁFICOS DA VARIAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE RESSONÂNCIAS DE ACORDO COM A POSIÇÃO DO CARRO

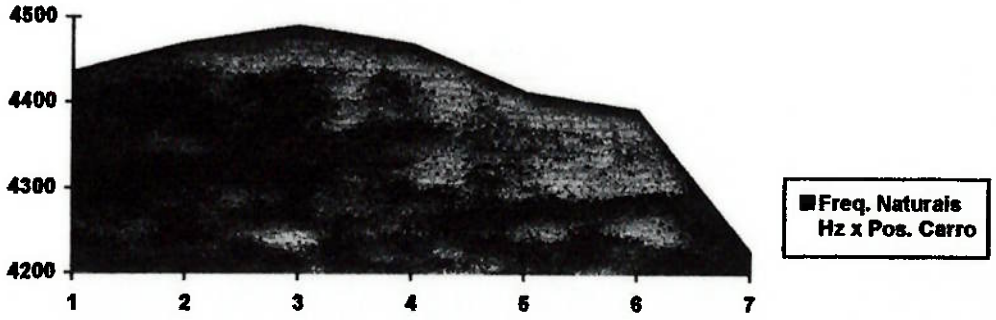
12° Frequência

w1_3 = 5929,2 Hz
w2_3 = 5928,9 Hz
w3_3 = 5925,4 Hz
w4_3 = 5913,0 Hz
w5_3 = 5867,9 Hz
w6_3 = 5704,5 Hz
w7_3 = 4885,0 Hz



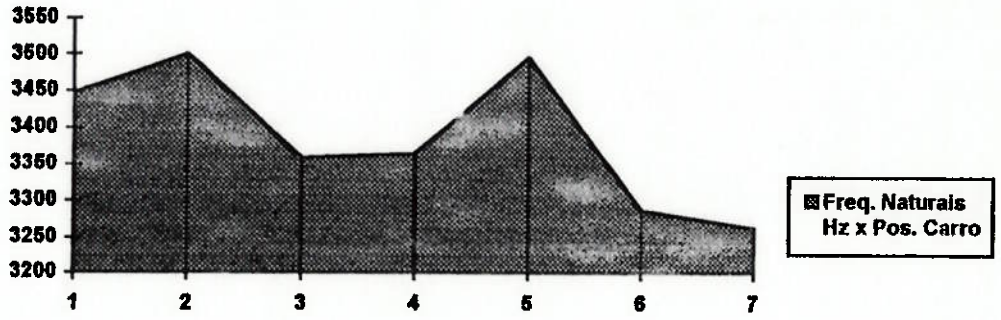
11° Frequência

w1_4 = 4.435,1 Hz
w2_4 = 4.469,3 Hz
w3_4 = 4.489,4 Hz
w4_4 = 4.468,0 Hz
w5_4 = 4.412,2 Hz
w6_4 = 4.391,1 Hz
w7_4 = 4.225,4 Hz



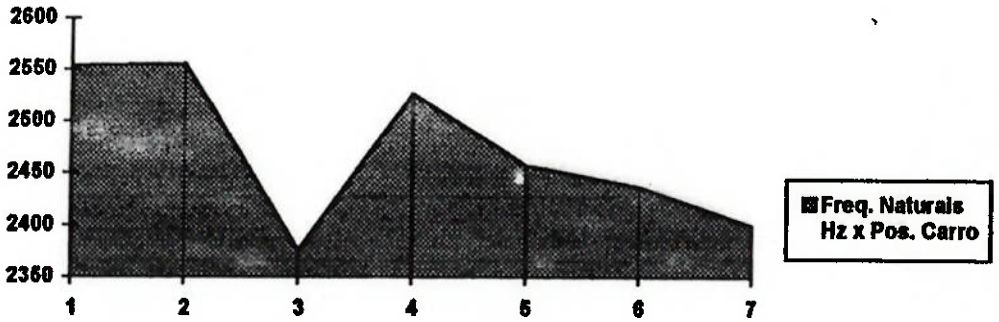
10° Frequência

w1_5 = 3.447,2 Hz
w2_5 = 3.501,1 Hz
w3_5 = 3.359,2 Hz
w4_5 = 3.366,7 Hz
w5_5 = 3.496,7 Hz
w6_5 = 3.287,2 Hz
w7_5 = 3.264,8 Hz



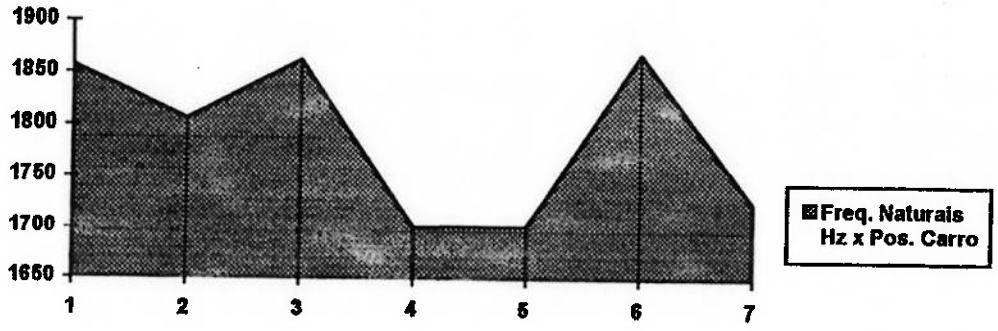
9° Frequência

w1_6 = 2.554,2 Hz
w2_6 = 2.556,9 Hz
w3_6 = 2.376,7 Hz
w4_6 = 2.527,8 Hz
w5_6 = 2.458,6 Hz
w6_6 = 2.437,9 Hz
w7_6 = 2.400,1 Hz



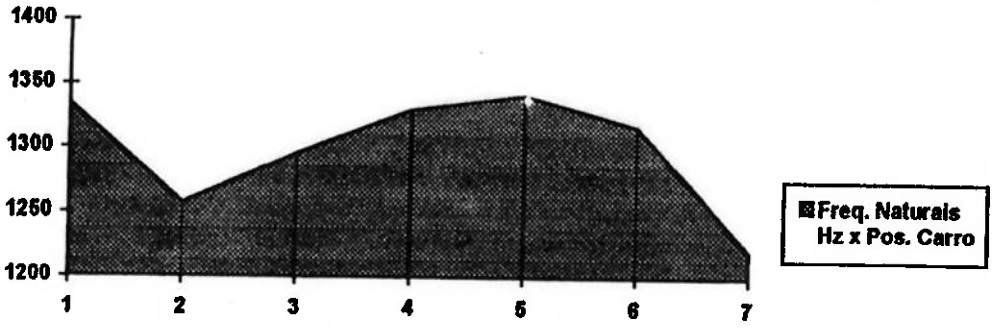
8° Frequência

w1_7 = 1.857,6 Hz
w2_7 = 1.806,1 Hz
w3_7 = 1.863,7 Hz
w4_7 = 1.702,7 Hz
w5_7 = 1.703,3 Hz
w6_7 = 1.869,5 Hz
w7_7 = 1.725,6 Hz



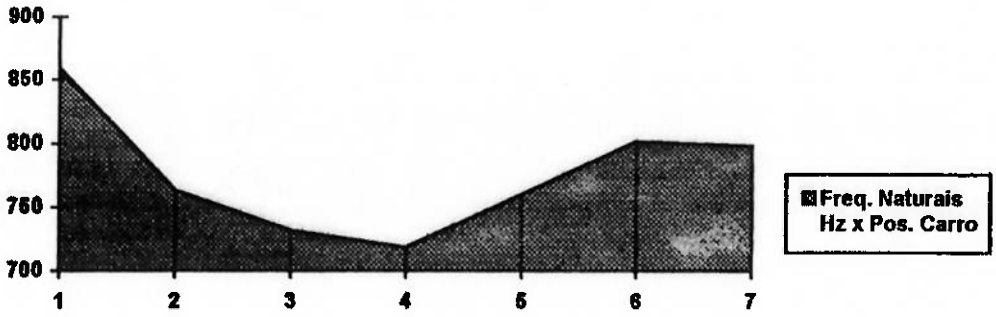
7° Frequência

w1_8 = 1.334,4 Hz
w2_8 = 1.257,2 Hz
w3_8 = 1.295,3 Hz
w4_8 = 1.330,7 Hz
w5_8 = 1.341,7 Hz
w6_8 = 1.317,8 Hz
w7_8 = 1.221,7 Hz



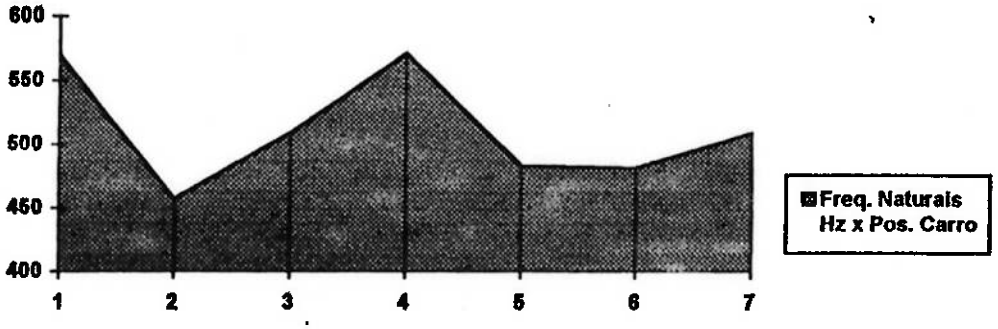
6° Frequência

w1_9 = 859.8572 Hz
w2_9 = 763.2805 Hz
w3_9 = 732.9136 Hz
w4_9 = 719.6497 Hz
w5_9 = 760.4153 Hz
w6_9 = 802.4356 Hz
w7_9 = 798.1231 Hz



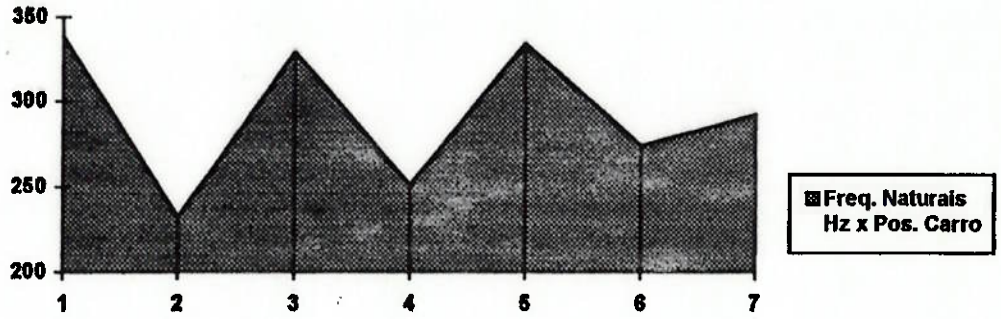
5° Frequência

w1_10 = 570.2228 Hz
w2_10 = 457.0834 Hz
w3_10 = 509.7671 Hz
w4_10 = 571.2008 Hz
w5_10 = 483.1067 Hz
w6_10 = 481.8971 Hz
w7_10 = 509.6707 Hz



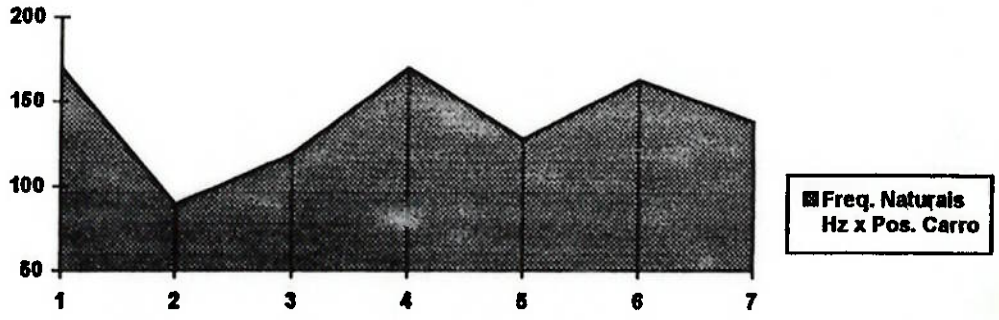
4° Frequência

w1_11 = 338.5249 Hz
w2_11 = 232.2735 Hz
w3_11 = 329.6891 Hz
w4_11 = 251.9509 Hz
w5_11 = 334.4707 Hz
w6_11 = 274.9394 Hz
w7_11 = 292.0983 Hz



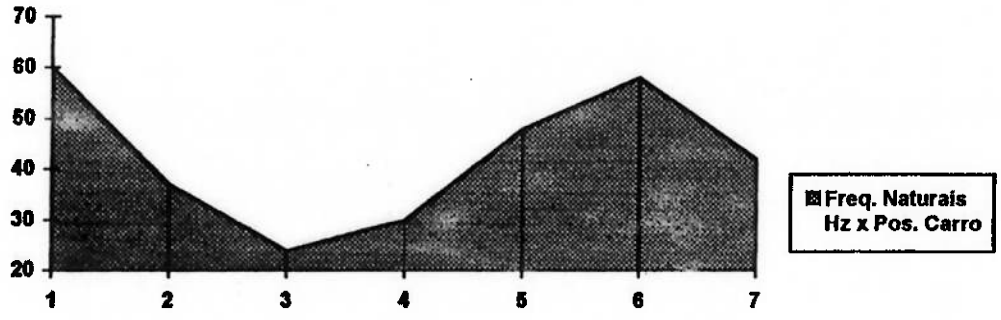
3° Frequência

w1_12 = 170.7300 Hz
w2_12 = 88.6726 Hz
w3_12 = 119.7543 Hz
w4_12 = 170.7711 Hz
w5_12 = 128.5568 Hz
w6_12 = 163.7174 Hz
w7_12 = 138.6670 Hz



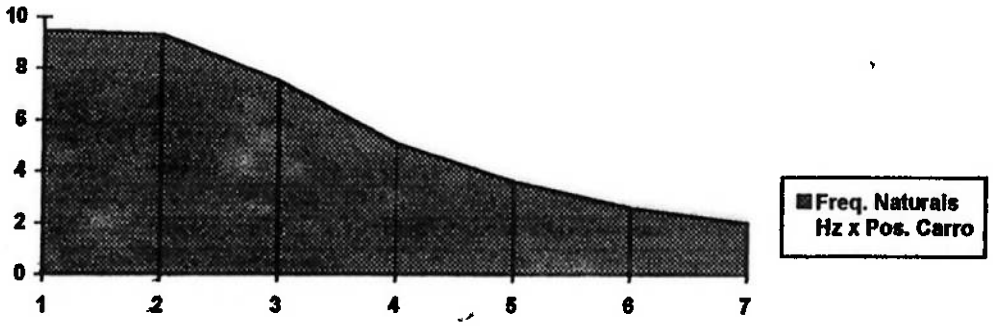
2° Frequência

w1_13 = 60.6762 Hz
w2_13 = 37.4633 Hz
w3_13 = 24.9293 Hz
w4_13 = 30.6035 Hz
w5_13 = 48.6177 Hz
w6_13 = 58.5676 Hz
w7_13 = 42.9216 Hz



1° Frequência

w1_14 = 9.5280 Hz
w2_14 = 9.3344 Hz
w3_14 = 7.5002 Hz
w4_14 = 5.1435 Hz
w5_14 = 3.6199 Hz
w6_14 = 2.6845 Hz
w7_14 = 2.0802 Hz



7. OBTENÇÃO DO MODELO REDUZIDO

7.1 HIPÓTESES UTILIZADAS

Barra engastada no cubo

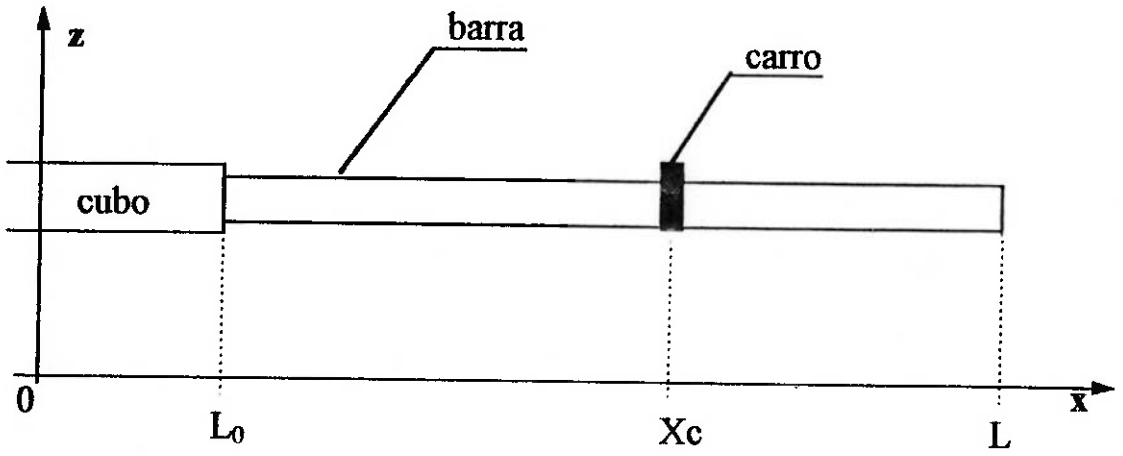
Cálculos considerando apenas deformação elástica transversal

Movimento num plano horizontal

Movimentos de corpo rígido e flexível superpostos

Massa do carro puntiforme

7.2 MODELAMENTO



- Massa do cubo = m_{cubo} = 0,5 Kg $\Rightarrow$ $\rho_c(x)$ = 2,5 Kg / m , considerando uma distribuição de massa uniforme.
- Massa da barra flexível distribuida
- ρ_b (x) = densidade linear de massa (barra) = 1,25 Kg / m
- m_c = massa do carro = 1,5 Kg
- $0 \leq x \leq L_0$ - Cubo - corpo rígido
- $L_0 \leq x \leq L$ - Barra - flexível

- θ (t) - ângulo de rotação en torno do eixo z, considerando como corpo rígido
- $\dot{\theta}$ (t) - velocidade angular
- u (x,t) - deformação transversal devido a flexão
- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$; $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ - derivadas parciais de u(x,t)

Energia cinética para um elemento de massa :

$$dT = (1/2)\, dm\, v^2 = (1/2)\, dm\, [x\, \dot{\theta} + u_t]^2$$

Na estrutura inteira, temos :

$$T_{cubo} = \frac{1}{2} \int_0^{Lo} \rho_c(x)\, x^2\, \dot{\theta}^2\, dx$$

$$T_{barra} = \frac{1}{2} \int_0^{Lo} \rho_b\, (x)\, [x\, \dot{\theta} + u_t]^2\, dx =$$

$$T_{carro} = \frac{1}{2}\, m_c\, [x_c\, \dot{\theta} + u_t(c)]^2$$

$$T_{total} = T_{cubo} + T_{barra} + T_{carro}$$

$$T_{total} = \frac{1}{2}\, J\, \dot{\theta}^2 + \int_{Lo}^{L} \rho_b\, (x)\, x\, \dot{\theta}\, u_t\, dx + \frac{1}{2} \int_{Lo}^{L} \rho_b\, (x)\, u_t^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\, m_c\, [x_c\, \dot{\theta} + u_t(c)]^2$$

Obs. : Estamos desprezando, no caso as influências dos sensores, como os acelerômetros, por os mesmos possuirem uma massa despresível em relação ao resto da estrutura.

J é o momento de inércia do conjunto (cubo + barra + carro)

Energia Potencial Elástica (Bibliografia 2) :

EI (x) = Rigidez da barra

Derivadas parciais de u(x,t) : $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$V = \frac{1}{2}\int_{L_o}^{L} E\,I\,(x)\;u_{xx}^{\,2}\,dx$$

Lagrangeano (L)

O Lagrangeano é definido por :

$$L = T - V\ ;$$

$$L = \frac{1}{2} J \theta^2 + \int_{L_o}^{L} \rho_b\,(x)\,x\,\theta\,u_t\,dx + \frac{1}{2}\int_{L_o}^{L} \rho_b\,(x)\,u_t^{\,2}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2} m_c\,[\,x_c\,\theta + u_t(c)\,]^2 - \frac{1}{2}\int_{L_o}^{L} E\,I\,(x)\;u_{xx}^{\,2}\,dx$$

Equações de movimento de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

onde : q_j = coordenada generalizada independente

Q_j = forças não conservativas

Utilizando Lagrange, teremos :

$$(\,J_c + J_p\,)\,\ddot{\theta} + \int_{L_0}^{L} \rho\,(x)\,x\,u_{tt}\,dx + m_c\,x_c\,u_{tt} = \tau_L$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,[\,E\,I(x)\,u_{tt}\,] + \rho\,(x)\,[\,u_{tt} + x\,\ddot{\theta}\,] = 0$$

as condições de contorno são as seguintes :

Extremidade Engastada ($x = L_0$)

deformação nula $\rightarrow u\,(L_0\,,t\,) = 0$;

inclinação nula $\rightarrow u_x\,(L_0\,,t\,) = 0$;

Extremidade Livre ($x = L$)

momento fletor nulo $\rightarrow u_{xx}\,(L\,,t\,) = 0$

Esforço cortante nulo , se a massa não estiver na extremidade senão, teremos :

$$u_{xxx}(L, t) = \left[\frac{m_p}{EI(L)}\right][L\ddot{\theta} + u_{tt}(L, t)]$$

Dessa forma, teremos o modelo contínuo do sistema caracterizado.

Para podermos controlar esse sistema, devemos ter um sistema na forma: $y = Ax + Bu$

Devemos fazer então uma *separação de variáveis*

Admitindo-se a separação de variáveis para u (Meirovitch , 1986 ; Singh et all. , 1989) , pode-se reescrever como :

$$U(x, t) = \sum_{i=1} \phi_i(x)\,\eta_i(t) = \phi(x)\,\eta(t)$$

onde : $\phi_i(x)$ = Funções admissíveis, que satisfazem as condições geométricas e são ortogonais em $x \in [L_0, L]$;

$\eta_i(t)$ = coordenadas generalizadas ;

$\phi(x) \equiv [\phi_1(x)\ \phi_2(x)\ \ldots\ \phi_n(x)]$;

$\eta(t) \equiv [\eta_1(t)\ \eta_2(t)\ \ldots\ \eta_n(t)]$;

Equações Dinâmicas

Substituindo u(x,t) nas equações do modelo contínuo, isto é, as equações da Energia Cinética e Potencial e utilizando a formulação de Lagrange, obtem-se :

$$J\ddot{\theta} + [m]\ddot{\eta} = \tau_L$$

$$[m]^T\ddot{\theta} + [M]\ddot{\eta} + [K]\eta = 0$$

Temos essas equações representando o sistema barra + cubo + carro para as seguintes matrizes :

$$[\,m\,] = \int_{L_o}^{L} \rho(x)\ x\ \phi(x)\,dx\ +\ m_c\,x_c\,\phi(x_c)\ ;\ (\text{matriz}\ (n \times 1))$$

$$[\,M\,] = \int_{L_o}^{L} \rho(x)\,\phi^T(x)\,\phi(x)\,dx\ +\ m_c\,\phi^T(x_c)\,\phi(x_c)\ ;\ (\text{matriz}\ (n \times n))$$

$$[\,K\,] = \int_{L_o}^{L} E\,I(x)\,\phi''^{\,T}(x)\,\phi''(x)\,dx\ ;\ (n \times n)$$

J = momento de inércia total do sistema

τ_L = torque fornecido a carga

Teremos, então a seguinte equação equivalente :

$$\begin{bmatrix} J & [\,m\,] \\ [\,m\,]^T & [\,M\,] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{0\} & \theta \\ [\,K\,] & \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_L \\ \{0\}^T \end{bmatrix}$$

Embora se tenha obtido as equações dinâmicas, falta a definição de ϕ, ou seja, das funções admissíveis e o valor de N. Neste trabalho utilizou-se como funções admissíveis aquelas correspondentes a solução analítica para uma viga engastada (Meirovitch, 1986) , sem levar em consideração o carro móvel. As funções admissíveis representam os modos admitidos do sistema, no caso os três primeiros modos (N=3).

$$\phi_i(x) = A_i\,[\,\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)] + B_i\,[\,\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)\,]$$

Para determinar β_i , utilizamos a seguinte relação :

$$\cos(\beta_i L)\ \cosh(\beta_i L)\ +\ 1\ =\ 0\ ,\ \text{onde}\ L = 1{,}4\ \text{m}$$

Obtemos os seguintes valores :

$$\beta_1 L = 1{,}875\ \rightarrow\ \beta_1 = 1{,}34$$

$\beta_2 L = 4{,}693 \rightarrow \beta_2 = 3{,}35$

$\beta_3 L = 7{,}854 \rightarrow \beta_3 = 5{,}61$

As constantes A_i e B_i são definidas a partir da normalização :

$$\int_{L_o}^{L} \phi_i(x)\, \phi_i(x)\, dx = 1$$

Considerando $Y_0 = L_0 \beta_i$, $Y = L \beta_i$, e $Y = \beta_i x$, teremos :

$[A_i^2(- (1/4)\text{sen } 2Y + (1/4)\text{senh}2y - 2 \cos Y \cosh Y) + B_i^2 (Y + (\text{senh } Y) / 4 + (\text{sen } Y) / 4 - 2 \text{ sen} Y \text{ senh} Y) + A_i B_i (-2\cos 2Y - 2\text{senh}^2 Y /2 + 2\cos Y \cosh Y]_{Y0}^{Y} = 1$

Teremos, então como resultado as seguintes equações :

$\phi_1 (x) = 2{,}1 [\sin (1{,}34x) - \sinh (1{,}34x)] + 2 [\cos (1{,}34x) - \cosh (1{,}34x)]$

$\phi_2 (x) = 13{,}2 [\sin (3{,}35x) - \sinh (3{,}35x)] + 1 [\cos (3{,}35x) - \cosh (3{,}35x)]$

$\phi_3 (x) = 1 [\sin (5{,}61x) - \sinh (5{,}61x)] + 1{,}2 [\cos (5{,}61x) - \cosh (5{,}61x)]$

Assim, teremos que :

$$[m] = [\; 0{,}082 \quad 0{,}0195 \quad 0{,}035 \;]$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0{,}340 & 0{,}147 & 0{,}147 \\ 0{,}147 & 0{,}341 & 0{,}147 \\ 0{,}147 & 0{,}147 & 0{,}147 \end{bmatrix}$$

$J = 1{,}4935 \text{ Kg} . \text{m}^2$

$$[Ks] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 342 & -1{,}9 & -1{,}5 \\ 0 & -1{,}9 & 13436 & -8{,}2 \\ 0 & -0{,}5 & -8{,}2 & 105244 \end{bmatrix}$$

$$[Ms] = \begin{bmatrix} 1,4935 & 0,082 & 0,0195 & 0,035 \\ 0,0820 & 0,340 & 0,147 & 0,147 \\ 0,0195 & 0,147 & 0,341 & 0,147 \\ 0,0350 & 0,147 & 0,147 & 0,340 \end{bmatrix}$$

Temos, então :

$$[\,Ms\,]\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\eta}\end{bmatrix} + [\,Ks\,]\begin{bmatrix}\theta\\ \eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_L\\ \{0\}^t\end{bmatrix}$$

inversa da matriz [Ms]

$$min = \begin{bmatrix} 0.6790 & -0.1771 & 0.0426 & -0.0117 \\ -0.1771 & 4.0247 & -1.2077 & -1.1997 \\ 0.0426 & -1.2077 & 3.9669 & -1.1973 \\ -0.0117 & -1.1997 & -1.1973 & 3.9788 \end{bmatrix}$$

inversa de [Ms] vezes a matriz [K]

$$[w2] = 1.0e+005 * \begin{bmatrix} 0 & -0.0006 & 0.0057 & -0.0124 \\ 0 & 0.0138 & -0.1622 & -1.2626 \\ 0 & -0.0042 & 0.5331 & -1.2604 \\ 0 & -0.0041 & -0.1612 & 4.1875 \end{bmatrix}$$

$$\text{autovalores de } [w2] = 1.0e+005 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0101 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4809 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.2434 \end{bmatrix}$$

As frequências para o sistema serão as seguintes :

w1 = 0 Hz (que corresponde ao corpo rígido)

w2 = 5.0671 Hz

w3 = 34.9017 Hz

w4 = 103.6755 Hz

8. SISTEMA DE CONTROLE

"Na teoria convencional de controle, apenas os sinais de entrada, saída e de erro são considerados importantes; a análise e projeto de sistemas de controle são feitos usando-se funções de transferência, juntamente com uma variedade de técnicas gráficas tais como o método do lugar das raízes e gráficos de Nyquist. A característica essencial da teoria de controle convencional é que ela é baseada na relação de entrada-saída do sistema, ou a função de transferência.

A principal desvantagem da teoria de controle convencional é que, de modo geral, ela é aplicável apenas para sistemas lineares invariantes no tempo tendo uma única entrada e uma única saída. Ela é impotente para sistemas variantes no tempo, sistemas não lineares (exceto os mais simples), e sistemas de multiplas entradas e multiplas saídas. A teoria de controle convencional não é aplicada para sistemas não lineares." (referência 1).

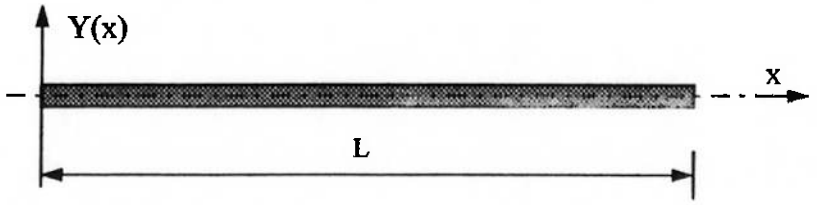
Para sistemas complexos, com um grande número de entradas e de saídas, temos a utilização de Sistemas de Controle por Espaço de Estados. O projeto na teoria de controle moderno pode ser feito para uma classe de entradas, ao invés de uma função de entrada específica, tal como a função impulsiva, função degrau, ou função senoidal.

Temos, para a resolução o seguinte sistema :

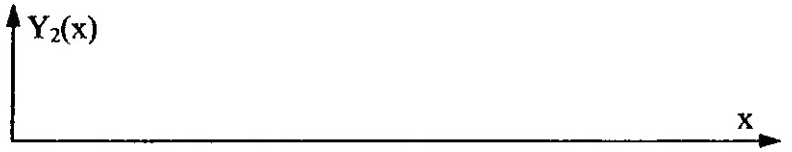
$$[\,Ms\,]\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\eta}\end{bmatrix} + [\,Ks\,]\begin{bmatrix}\theta\\ \eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_L\\ \{0\}^t\end{bmatrix}$$

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

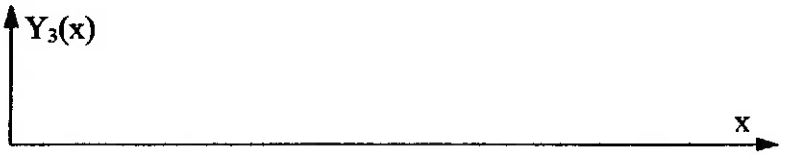
Tomando como base os dados obtidos na referência 2, temos que as três primeiras frequências de ressonância de uma barra engastada são as seguintes :



$$w_1 = 1{,}875^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$



$$w_2 = 4{,}694^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$



$$w_3 = 7{,}855^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

Os dados do projeto são os seguintes :

E = 70 GPa

$I = 5{,}6835 * 10^{-8}\ m^{-4}$

m = 1,25 Kg / m

L = 1,2 m

Assim sendo, obtemos os seguintes valores :

$$\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} = 39{,}178$$

$w_1 = 137{,}73$ rad/s $= 21{,}92$ Hz

$w_2 = 863{,}23$ rad/s $= 137{,}38$ Hz

$w_3 = 2417{,}32$ rad/s $= 384{,}72$ Hz

Esses valores devem ser comparados com os valores obtidos com o carro na posição 1, que é equivalente ao de uma barra engastada livre, assim temos as seguintes frequências :

9,5 Hz ; 60,67 Hz ; 170 Hz ; 338,52 Hz ; e outras.

Notamos, de acordo com a referência 2 - página 220, que as frequências naturais de um sistema discreto são menores que os correspondentes ao modelo contínuo. Isso pode ser explicado pela distribuição de massa no modelo, embora a somatória das massas é a mesma nos dois modelos, temos que a massa foi transferida para mais o centro da viga, com isso temos uma redução das frequências dos modos de vibrar.

Observando os resultados, percebemos um fato interessante que está de acordo com a bibliografia : Os modos de menor frequência obtidos são os modos de flexão, e são também os que temos interesse nesse trabalho.

Podemos também comparar esses valores com os valores obtidos no modelamento utilizando as funções admissíveis que representam os modos admitidos do sistema.

Os valores obtidos foram os seguintes :

w1 = 5.0671 Hz

w2 = 34.9017 Hz

w3 = 103.6755 Hz

Temos os seguintes valores para as frequências de ressonância:

	Modelamento via matrizes de massa e de rigidez	Dados bibliográficos	Modelamento utilizando as funções admissíveis
Primeiro modo	9.5280 Hz	21,92 Hz	5.0671 Hz
Segundo modo	60.6762 Hz	137,38 Hz	34.9017 Hz
Terceiro modo	170.7300 Hz	384,72 Hz	103.6755 Hz

Com esses valores podemos concluir que a nossa modelagem não está satisfatória, temos que os valores obtidos no modelamento via matrizes de massa e de rigidez está muito abaixo do que o dado bibliográfico e o modelamento utilizando as funções admissíveis estão menores ainda.

Para obtermos melhores valores, devemos dividir a nossa estrutura em mais elementos e no caso das funções admissíveis, utilizar outras funções que melhor representam os primeiros modos.

No projeto do sistema de controle não conseguimos finalizar e obter um sistema que fosse satisfatório para se fazer pequenas simulações.

Neste trabalho foi encontrado alguma dificuldade no que diz respeito a encontrar uma bibliografia adequada, foi utilizado principalmente trabalhos feitos por pesquisadores brasileiros e apresentados nos diversos congressos da área. Uma grande fonte de informação foi os livros do Leonard Meirovitch, que possui uma vasta publicação em vibração e em controle.

Apesar de tudo isso, o trabalho foi muito válido no sentido de que foi iniciado um trabalho em uma área relativamente nova e que possui um vasto campo de pesquisa.

Espero que os trabalhos nesta área de Controle de Estruturas Flexíveis possa contribuir efetivamento em áreas além do campo aeroespacial.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuiram na execução desse trabalho, principalmente o Prof. Agenor de T. Fleury pela sua orientação.

BIBLIOGRAFIA

1. Ogata, Katsuhiko - *Engenharia de Controle Moderno* - Predice Hall do Brasil, 1982.
2. Meirovitch, Leonard - *Elements of Vibration Analysis* - McGraw-Hill Book Company, 1986.
3. Meirovitch, Leonard - *Dynamics and Control of Strutures* - John Wiley & Sons, Inc. , 1990.
4. Meirovitch, Leonard - *Introduction to Dynamics and Control* - John Wiley & Sons, Inc. , 1985.
5. Weaver, William Jr. - *Structural Dynamics by Finite Elements* - Prentice-Hall, Inc. , 1987.
6. Fleury, Agenor de Toledo - *Identificação e Análise Modal de Estruturas Mecânicas* - Apostila do curso PMC-871 - E.P.U.S.P., 1994.
7. Giacaglia, G. E. O. - *Mecânica geral* - 10° edição revisada - Editora Campos LTDA. 1982.
8. Beer, Ferdinand P. - Johnston, E. Russell Jr - *Resistência dos Materiais* , 2°edição 1989.
9. Blevins - *Formulas For Natural Frequency and Mode Shape*
10. Bremer, Hartmut - *Force Controlled Elastic Robots* - XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - São Paulo - SP - Brasil - Dezembro,1991.
11. Chalhoub, N. G.- Ulsoy, A. G. - *Control of a Flexible Robot Arm : Experimental and Theoretical Results* - Jornal of Dynamic

Systems, Measurement, and Control - December 1987 - Vol. 109/299.

12. Cintra - *Controle de estrutura flexível* - VI DINANE - Caxambu - MG , 1995.

13. Usoro, P. B. - Nadira, R. - Mahil, S. S. - *A Finite Element Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators* - Transactions of the ASME - September 1986 Vol. 108 - 198.

14. Yu, H. - Sebeviratne, L. D. - Earles, S. W. E. - *Exponentially stable robust control law for robot manipulators* - IEE Proc - Control Theory Appl. - Vol 141 - N° 6 - November 1994.

15. Fernandes, Chris - Gurvits, Leonid - Li, Zexiang - *Attitude Control of a Space Platform Manipulator System Using Internal Motion* - The Internacional Journal of Robotics Research - Vol. 13 - N° 4 - August 1994 - pp. 289-304